



# Théorie des plaques, déplacement complémentaire et plaques stratifiées

Bernard Nayroles

## ► To cite this version:

Bernard Nayroles. Théorie des plaques, déplacement complémentaire et plaques stratifiées. 2009. hal-01319585

**HAL Id: hal-01319585**

**<https://hal.science/hal-01319585>**

Submitted on 18 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution| 4.0 International License

Théorie des plaques,  
déplacement complémentaire  
et plaques stratifiées

Bernard Nayroles  
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS Marseille

Juin 2009

# Introduction

Ce travail fait suite à un article publié en 1999 [3] et que je comptais compléter par quelques considérations d'analyse fonctionnelle. Un changement d'activité imprévu m'en a empêché, mais ce n'était que partie remise. C'est aussi bien ainsi : outre les quelques précisions d'analyse fonctionnelle prévues, d'ailleurs assez banales, ce qui suit est un exposé de synthèse sur les théories classiques suivi d'un développement plus poussé de la méthode du déplacement complémentaire. J'avais déjà, dans les années 60, esquissé cette méthode dans une perspective pédagogique ; le manque de moyens de calcul formel et même simplement numérique l'avait laissée au rang de curiosité.

## Trois aspects de la théorie des plaques

On peut choisir de diviser la théorie des plaques en trois parties :

- une formulation abstraite de la mécanique d'un solide bidimensionnel nommé plaque, formulation qui, si l'on se limite à la flexion pour fixer les idées, introduit comme variables duales naturelles la courbure de la surface déformée et le tenseur de flexion-torsion ;
- la substitution du modèle bidimensionnel précédent au modèle tridimensionnel du solide réel. C'est lors de celle-ci qu'apparaît la notion de déplacement complémentaire.
- les applications techniques dérivées de ce modèle tridimensionnel : éléments finis, vibrations, charnières plastiques etc.

Dans la plupart des traités de Résistance des Matériaux on mélange sans vergogne les deux premières parties, puisque, de toute façon, le texte est destiné à des ingénieurs injustement réputés plus soucieux de la pratique que de la démarche scientifique.

Si des préoccupations puristes<sup>1</sup> justifient la première partie, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté particulière, c'est bien la deuxième qui contient les choix fondateurs de la théorie.

---

1. voire esthétiques ou même axiomatiques...

Bien que destinée aux applications la troisième partie peut nécessiter des retours sur la deuxième ; en effet certains choix doivent être remis en question lorsque la loi constitutive du matériau est fortement non linéaire (en plasticité par exemple), ou qu'il faut prendre en compte des sollicitations électromagnétiques, ou encore lorsqu'on cherche à raccorder les schémas bi-dimensionnel et tridimensionnel à proximité du bord etc. On doit alors bien garder à l'esprit les bases posées par les deux premières parties de la théorie pour éviter les incohérences.

## Le déplacement complémentaire

Les hypothèses les plus courantes, comme celle de la rectilignité des normales déformées, sont de type cinématique<sup>2</sup>. Elles substituent au champ de déplacement réel  $\vec{U}$  un champ approché  $\vec{V}$  qui en diffère par le "déplacement complémentaire"  $\vec{u}$  :

$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{u}$$

Les théories usuelles des plaques considèrent ce déplacement complémentaire comme négligeable, quitte à admettre implicitement son existence comme dans les évaluations classiques des contraintes de cisaillement transverse.<sup>3</sup>

Si l'on s'en tient aux strictes hypothèses cinématiques, qui sont en fait des liaisons artificielles, on sait que les contraintes ainsi calculées ne vérifieront pas les équations d'équilibre intérieur sans l'addition des efforts de liaison correspondants. Les traités pédagogiques restent discrets sur ce point mais de nombreux articles de revue s'en préoccupent. Citons, parmi beaucoup d'autres, W.T. Koiter [5], W.T. Koiter and J.G. Simmonds [6], P. Ladeveze [9], [10], [11], M. Levinson [12], S. Nair et E. Reissner [13], E. Reissner [15], [16], [17], [18], [19], [20], M. Touratier [21], Z. Rychter [22], G. Verchery [23]. Notons que la bibliographie des plaques est gigantesque.

En fait les hypothèses nécessaires à l'existence d'une théorie bidimensionnelle des plaques sont le principe de Saint-Venant d'une part<sup>4</sup>, et une distance suffisante du bord, de l'ordre de l'épaisseur. C'est le déplacement principal qui supporte les notions classiques de la théorie des plaques : moments de flexion-torsion, effort tranchant etc. tandis que le déplacement complémentaire sera déterminé en sorte d'engendrer une solution tridimensionnelle acceptable voir exacte.

---

2. même si on leur associe l'hypothèse dite des contraintes planes  $\sigma_{33} = 0$  qui est de type "sthénique".

3. Le chapitre 6 détaillera ces évaluations en les complétant par l'indication du déplacement complémentaire correspondant.

4. éventuellement étendu en fonction du déplacement principal choisi.

En appliquant le principe des travaux virtuels aux déplacements virtuels principaux  $\delta \vec{V}$  puis complémentaires  $\delta \vec{u}$  on est conduit à écrire deux groupes d'équations : celles des plaques et celles du déplacement complémentaire. On étudie l'équivalence éventuelle entre ces deux groupes d'équations d'une part, et les équations du solide tridimensionnel modélisé par une plaque d'autre part. On voit que cette équivalence a précisément lieu dans les conditions pour lesquelles le principe de Saint-Venant est exactement vérifié, ce qui est, somme toute, passablement rassurant. Ce principe peut d'ailleurs s'exprimer en termes de la loi des efforts extérieurs qui doit posséder la propriété notée  $\mathcal{P}_{SV}$  : elle doit être indépendante du déplacement complémentaire et le travail virtuel des efforts extérieurs doit être nul dans tout déplacement virtuel complémentaire.

### L'équation différentielle du déplacement complémentaire

Si l'on suppose donnés les déplacements généralisés de la plaque le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  et le déplacement complémentaire  $\vec{u}$  sont les inconnues du système d'équations associé au déplacement complémentaire ; on peut éliminer  $\vec{\sigma}$  pour obtenir une équation aux dérivées partielles linéaire qui détermine  $\vec{u}$ . Les trois variables d'espace  $(x_1, x_2, z)$  sont effectivement concernées. Mais lorsqu'il s'agit d'une plaque stratifiée et que les déplacements généralisés sont des polynômes en  $(x_1, x_2)$  *l'équation aux dérivées partielles se réduit à une équation différentielle ordinaire pour la variable  $z$ , linéaire et à coefficients constants dans chaque couche*. L'inconnue est le vecteur des coefficients  $c_{ijk}(z)$  des polynômes inconnus

$$u_i = \sum_{j,k} c_{ijk}(z) x^j y^k, \quad i = 1, 2, 3$$

Dans le cas des plaques stratifiées on peut la résoudre formellement.

*Ainsi lorsque les déplacements généralisés sont des polynômes en  $(x_1, x_2)$ , et c'est le cas des éléments finis, la méthode du déplacement complémentaire fournit la solution tridimensionnelle exacte.*

### Composition de l'article et base de comparaison

Les six premiers chapitres sont un exposé assez personnel de la théorie classique des plaques. La notion mathématique de moment d'une mesure y joue un rôle essentiel, même si, d'ordinaire, on la laisse implicite. Les quelques précisions d'analyse fonctionnelle devraient répondre aux questions naturelles des amateurs de mathématiques. Enfin le chapitre 6 donne une présentation des estimations classiques des contraintes de cisaillement, avec un hommage

spécial à la méthode mixte de E. Reissner très originale pour l'époque (1945). Les deux derniers chapitres décrivent la méthode du déplacement complémentaire et ses résultats pour les plaques stratifiées.

Ayant depuis longtemps perdu le goût des exposés théoriques qui ne s'accompagnent pas de résultats numériques comparables à ceux de la littérature, nous avons choisi pour référence l'excellent traité de J.-L.Batoz et G.Dhatt [4].

# Chapitre 1

## Différents modèles de plaque

On va comparer les modèles bidimensionnels par lesquels on a coutume d'approcher le modèle tridimensionnel de référence.

### 1.1 La plaque comme solide tridimensionnel

#### 1.1.1 Géométrie et coordonnées

L'espace euclidien tridimensionnel est rapporté aux coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, z)$ . On note  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  les vecteurs unitaires des axes.

Dans l'acception étroite du terme on nomme plaque un solide qui, dans l'état de référence, occupe un volume  $\Psi$  du type :

$$\Psi = \Omega \times ]-h/2, h/2[ \quad (1.1)$$

où l'épaisseur  $h$  est une constante,  $\Omega$  un domaine ouvert borné du plan  $(x_1, O, x_2)$ , et de frontière  $\partial\Omega$ . C'est le cas de la plaque représentée par la figure 1.1.

Pour étendre le champ d'application pratique de la théorie on étend cette acception à des solides d'épaisseur variable, symétriques par rapport au plan  $(x_1, O, x_2)$  :

$$\Psi = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et } |z| \leq h(x_1, x_2)/2\} \quad (1.2)$$

et l'on suppose qu'il existe deux constantes notées  $h_{min}$  et  $h_{max}$ , telles que :

$$0 < h_{min} \leq h(x_1, x_2) \leq h_{max} \quad (1.3)$$

Enfin il arrive que tout le volume  $\Psi$  ne soit pas occupé par la matière de la plaque comme c'est le cas, par exemple, d'un carton ondulé.

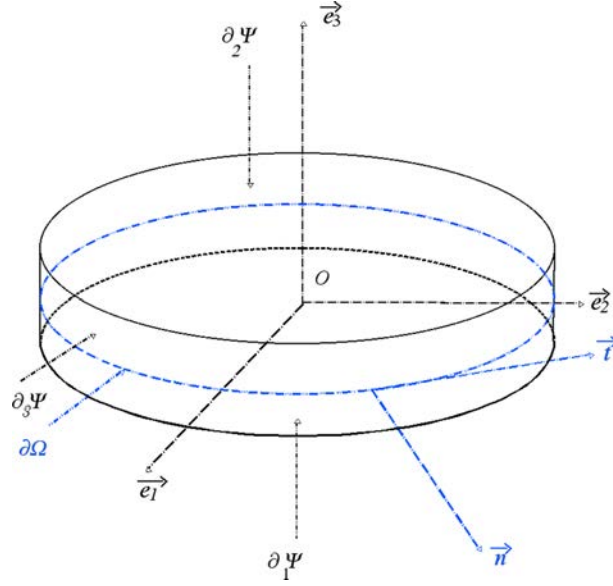


FIGURE 1.1 – Plaque plane et coordonnées

La frontière  $\partial\Psi$  du domaine  $\Psi$  est la réunion des faces inférieure  $\partial_1\Psi$ , supérieure  $\partial_2\Psi$  et latérale  $\partial_3\Psi$  :

$$\partial_1\Psi = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et } z = -h(x_1, x_2)/2\} \quad (1.4)$$

$$\partial_2\Psi = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et } z = h(x_1, x_2)/2\} \quad (1.5)$$

$$\partial_3\Psi = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega \text{ et } |z| \in ]-h/2, h/2[ \} \quad (1.6)$$

On notera  $\vec{n}$  le vecteur normale extérieure à  $\partial\Omega$ ,  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent choisi en sorte que la base  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{e}_3)$  soit orthonormée directe. On notera encore  $s$  l'abscisse curviligne sur  $\partial\Omega$ .

### 1.1.2 Efforts extérieurs ou charges

Les "charges" (ou efforts extérieurs) sur un solide tridimensionnel sont en général représentées par une densité volumique de force  $\vec{f}$  exercée dans  $\Psi$  et par une densité surfacique de force  $\vec{F}$  exercée sur sa frontière. Compte tenu de la géométrie particulière du solide étudié les charges sont mises sous la forme :

$$\Phi = (\vec{f}, \vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3) \quad (1.7)$$

où les densités surfaciques  $\vec{F}^1$ ,  $\vec{F}^2$  et  $\vec{F}^3$  sont exercées respectivement sur les surfaces  $\partial_1\Psi$ ,  $\partial_2\Psi$  et  $\partial_3\Psi$ .



### 1.1.3 Notations

On notera, pour une dimension  $\nu$  égale à 2 ou 3 :

$E^\nu$  l'espace euclidien de dimension  $\nu$ ,

$\mathbb{T}_\nu$  l'espace des tenseurs symétriques du deuxième ordre sur l'espace euclidien  $E^\nu$ ,

$\mathbb{V}_\nu$  l'espace des vecteurs de  $E^\nu$

Si  $\vec{\epsilon} \in \mathbb{T}_3$  on note  $\vec{\epsilon}^{(2)}$  la partie plane de ce tenseur, de composantes  $\epsilon_{ij}^{(2)} = \epsilon_{ij}$  pour les valeurs 1 et 2 de  $i$  et de  $j$ .

De même si  $\Delta$  désigne un opérateur différentiel sur  $E^3$  on notera  $\Delta^{(2)}$  l'opérateur de même nom sur  $E^2$  ; ainsi pour la divergence  $\text{div}^{(2)} \vec{u} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2$

Le symbole "." désigne un produit scalaire de deux vecteurs et, plus généralement, un simple produit contracté, tandis que le symbole ":" désigne un double produit contracté de deux tenseurs euclidiens ; ainsi, avec la convention de sommation des indices répétés :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_i v_i \\ (\vec{T} \cdot \vec{v})_i &= T_{ij} v_j \\ (\vec{v} \cdot \vec{T})_i &= T_{ji} v_j \\ \vec{u} \cdot \vec{T} \cdot \vec{v} &= u_i T_{ij} v_j \\ \vec{S} : \vec{T} &= S_{ij} T_{ji}\end{aligned}$$

### 1.1.4 Espaces fonctionnels

Pour décrire la situation mathématique engendrée par la théorie classique du milieu continu tridimensionnel il est commode d'introduire explicitement quatre espaces vectoriels réels de champs vectoriels ou tensoriels, notés :

- $\mathbb{U}$  est l'espace des champs de déplacements

$$\mathbb{U} : \bar{\Psi} \mapsto \mathbb{V}_3$$

où  $\bar{\Psi}$  désigne l'adhérence de  $\Psi$  ; en effet les champs de déplacements doivent être aussi définis, au moins en un certain sens, sur la frontière  $\partial\Psi$  pour qu'existe la puissance virtuelle des efforts exercés sur celle-ci.

- $\mathbb{F}$  est l'espace des efforts extérieurs de la forme (1.7) ;
- $\mathbb{E}$  est l'espace des champs de tenseurs de déformation  $\vec{\epsilon} : \Psi \mapsto \mathbb{T}_3$
- $\mathbb{S}$  est l'espace des champs de tenseurs de contrainte  $\vec{\sigma} : \Psi \mapsto \mathbb{T}_3$

L'hypothèse des transformations infinitésimales se traduit par le fait que l'espace  $\mathbb{U}$  des champs de déplacements est vectoriel, et coïncide avec l'espace des champs de vitesses virtuelles.

D'une façon générale on précise le choix de ces quatre espaces par deux types de conditions :

- les conditions algébriques qui décrivent en général des liaisons auxquelles le solide est soumis, pour l'instant aucune ;
- les conditions de régularité dont le choix est très dépendant la loi de comportement.

Pour nous affranchir de celles-ci le plus longtemps possible nous supposons seulement, au moins dans un premier temps, que ces espaces possèdent la propriété suivante :

### Propriété $\mathcal{P}$ pour un espace fonctionnel

*Considérons un espace de fonctions (et/ou de distributions) définies sur une partie bornée de  $E^\nu$  ; nous dirons qu'il possède la propriété  $\mathcal{P}$  s'il contient les restrictions à ce domaine de toutes les fonctions indéfiniment différentiables sur  $E^\nu$ .*

## 1.1.5 Dualités déplacements-efforts et déformations-contraintes

Bien qu'en toute généralité il s'agisse de distributions, on gardera la notation des intégrales de fonction pour expliciter les formes linéaires associées à la puissance virtuelle. Ainsi la forme bilinéaire associée à la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit-elle :

$$(\delta \vec{U}, \Phi) \in \mathbb{U} \times \mathbb{F} \mapsto \langle \delta \vec{U}, \Phi \rangle_u = \int_{\Psi} \delta \vec{U} \cdot \vec{f} + \sum \int_{\partial_k \Psi} \delta \vec{U} \cdot \vec{F}^k \quad (1.8)$$

où, comme on le fera dans presque toute la suite, on note par le même symbole  $\int$  les intégrales simples ou multiples, le domaine d'intégration donnant toute l'information nécessaire. De même on omet le symbole de la mesure lorsqu'il s'agit de celle de Lebesgue (e.g. :  $dx_1 dx_2 dz$  pour les intégrales de volume) ou de son extension usuelle aux distributions.

Enfin nous omettrons la notation de trace, e.g.  $w|_{\partial\Omega}$ , lorsqu'il s'agit de valeurs prises sur  $\partial\Omega$ , en nous réservant de vérifier a posteriori qu'elles existent effectivement pour le cadre fonctionnel choisi.

Grâce à la propriété  $\mathcal{P}$  la forme bilinéaire (1.8) place les espaces  $\mathbb{U}$  et  $\mathbb{F}$  en une dualité séparante<sup>1</sup> qu'on note  $(\mathbb{U}, \langle \cdot, \cdot \rangle_u, \mathbb{F})$ .

---

1. La dualité est séparante parce que les espaces considérés sont des espaces de distri-

De même la forme bilinéaire associée à la puissance virtuelle des contraintes<sup>2</sup> :

$$(\vec{\epsilon}, \vec{\sigma}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{S} \mapsto \langle \vec{\epsilon}, \vec{\sigma} \rangle_{\epsilon} = - \int_{\Psi} \vec{\epsilon} : \vec{\sigma} \quad (1.9)$$

place les espaces  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{S}$  en une dualité séparante qu'on note  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\epsilon}, \mathbb{S})$ .

### 1.1.6 Opérateur de déformation et opérateur d'équilibre

L'opérateur de déformation  $\mathcal{D} : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{E}$  est, dans le cas du solide tridimensionnel classique, la partie symétrique du gradient, notée aussi  $grad_s$  :

$$(\mathcal{D}\vec{U})_{ij} = grad_s(\vec{U})_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.10)$$

avec, bien sûr dans ce contexte :  $x_3 = z$ .

S'il existe<sup>3</sup> son transposé est défini par :

$$\mathcal{D}^T : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{F} \quad (1.11)$$

$$\forall \vec{U} \in \mathbb{U}, \forall \vec{\sigma} \in \mathbb{S} : \langle \mathcal{D}\vec{U}, \vec{\sigma} \rangle_{\epsilon} = \langle \vec{U}, \mathcal{D}^T \vec{\sigma} \rangle_u \quad (1.12)$$

Cet opérateur transposé est l'"opérateur d'équilibre". En effet le principe des puissances virtuelles pose qu'un champ de contraintes  $\vec{\sigma}$  et une charge  $\Phi$  sont en équilibre si :

$$\forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U} : \langle \delta \vec{u}, \Phi \rangle_u + \langle \mathcal{D} \delta \vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_{\epsilon} = 0 \quad (1.13)$$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre (1.12) sous la forme condensée :

$$\mathcal{D}^T \vec{\sigma} + \Phi = 0 \quad (1.14)$$

En explicitant classiquement l'équation (1.12) à l'aide du théorème flux-divergence on montre qu'elle équivaut au système bien connu :

$$div \vec{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad \text{dans } \Psi \quad (1.15)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \vec{F}^k = 0 \quad \text{sur } \partial_k \Psi \quad (1.16)$$

---

butions mis en dualité avec des espaces qui contiennent toutes les fonctions indéfiniment différentiables.

2. Le signe - qui précède l'intégrale de l'équation (1.9) correspond à la convention qui compte positivement les contraintes de traction.

3. i.e. si et seulement si  $\mathcal{D}$  est continu pour les "topologies compatibles avec la dualité".

### 1.1.7 Noyaux, images et orthogonalité dans la dualité à quatre espaces

D'une façon plus générale en mécanique des structures on rencontre des schémas de dualité à quatre espaces  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{S}$ . Leurs éléments sont des variables "généralisées" (déformations, contraintes etc.). Deux formes bilinéaires définissent les dualités tandis qu'un opérateur de déformation et son transposé établissent les communications entre celles-ci, ce que résume l'hypothèse suivante :

#### Hypothèse 1 *Richesse des espaces fonctionnels*

*Les quatre espaces contiennent toutes les restrictions au compact  $\bar{\Psi}$  des fonctions indéfiniment dérivables (propriété  $\mathcal{P}$  (cf.1.1.4)). Les formes bilinéaires (1.8) et (1.9) existent. L'opérateur  $\mathcal{D}$  est défini sur  $\mathbb{U}$  (par la relation (1.10) dans le cas particulier du solide tridimensionnel) ; il prend ses valeurs dans  $\mathbb{E}$  et est continu pour les topologies compatibles avec les dualités.*

Le diagramme suivant exhibe les propriétés de dualité que nous exploiterons dans la suite.

<i>Var.</i>	<i>Dualités</i>	<i>Var.</i>
$\vec{U}$	$(\mathcal{D}^T(\mathbb{S}))^\circ = \mathbb{U}^s = \ker(\mathcal{D}) \subset \mathbb{U}$ $\mathcal{D} \downarrow$	$\mathbb{F} \supset (\mathbb{U}^s)^\circ \supseteq (\mathcal{D}^T(\mathbb{S}))$ $\uparrow \mathcal{D}^T$
$\vec{\epsilon}$	$\mathcal{D}(\mathbb{U}) \subseteq (\ker \mathcal{D}^T)^\circ \subset \mathbb{E}$ $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$	$\mathbb{S} \supset (\mathcal{D}\mathbb{U})^\circ = \ker(\mathcal{D}^T)$ $\vec{\sigma}$

FIGURE 1.2 – Dualité à quatre espaces pour le solide tridimensionnel

Les symboles  $\subseteq$  et  $\supseteq$  signalent que dans, les bonnes situations, l'inclusion a lieu en tant qu'égalité.

Nous retrouverons le même type de diagramme pour les deux modèles bidimensionnels ; pour bien mettre en évidence l'analogie des situations nous garderons les noms des espaces fonctionnels, des opérateurs de déformation et d'équilibre, à ceci près que ces noms porteront l'indice "R" pour le modèle de Reissner qui prend en compte le cisaillement transverse, ou l'indice "K" pour le modèle de Kirchhoff qui est celui de la flexion simple. Pour simplifier le texte nous donnerons à ces modèles les noms "R" ou "K".

Le noyau  $\mathbb{U}^s = \ker(\mathcal{D})$  de l'opérateur  $\mathcal{D}$  est l'espace des déplacements de corps rigide, de dimension 6 puisque nous n'avons introduit aucune liaison ; en fait, sauf mention contraire, tout ce qui suit reste valable lorsque des liaisons réduisent la dimension  $d_s$ , éventuellement à 0. Lorsque  $d_s = 6$  l'orthogonal

$(\mathbb{U}^s)^o$  est l'espace des charges dont le torseur est nul. Classiquement  $\mathbb{U}^s$  est, comme noyau d'un transposé, l'orthogonal de l'image  $\mathcal{D}^T(\mathbb{S})$  dont  $(\mathbb{U}^s)^o$  est l'adhérence. On a donc :

$$\mathcal{D}^T(\mathbb{S}) \subseteq (\mathbb{U}^s)^o \quad (1.17)$$

En termes mécaniques l'inclusion signifie qu'une condition nécessaire pour qu'une charge  $\Phi$  soit équilibrée par un champ de contraintes  $\vec{\sigma}$  est qu'elle soit de torseur nul. Si l'inclusion est vérifiée en tant qu'égalité cette condition devient suffisante.

De même le sous-espace  $\ker(\mathcal{D}^T)$ , espace des champs de contraintes autoéquilibrés, est l'orthogonal de l'image  $\mathcal{D}(\mathbb{U})$ ; on a donc l'inclusion :

$$\mathcal{D}(\mathbb{U}) \subseteq (\ker(\mathcal{D}))^o \quad (1.18)$$

Une condition nécessaire pour qu'il existe un champ de déplacement  $\vec{U}$  qui engendre un champ de déformations  $\vec{\epsilon}$  donné est donc que ce dernier développe une puissance nulle dans tout champ de contraintes  $\vec{\sigma}$  autoéquilibré<sup>4</sup>.

En élasticité linéaire classique on peut établir l'égalité dans (1.18) en utilisant des résultats d'analyse fonctionnelle (l'application  $\mathcal{D} : (H^1(\Psi))^3 \mapsto (L^2(\Psi))^6$  est compacte). En fait J.J. Moreau[27] l'a démontrée dans un cadre beaucoup plus général, pratiquement indépendant du choix des espaces fonctionnels : il suffit que  $\vec{\epsilon}$  soit une distribution sur  $\Psi$ , orthogonale à tous les champs de contraintes réguliers et autoéquilibrés. Le chapitre 3 sera consacré à cette égalité pour le solide tridimensionnel et pour les deux modèles de plaque bidimensionnels et même, un peu plus généralement, à la compatibilité des déformations (ordinaires ou généralisées).

## 1.2 Le modèle de Reissner

### 1.2.1 Déplacements généralisés, cisaillement transverse et flexion simple

On peut construire une théorie des plaques indépendantes de celle du solide tridimensionnel et dans lesquelles l'être mécanique élémentaire n'est pas la particule matérielle de coordonnées  $(x_1, x_2, z)$  mais la "normale matérielle" de coordonnées  $(x_1, x_2)$  c'est-à-dire la partie du segment :

$$\mathcal{N}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z) / |z| \leq h(x_1, x_2)/2\}$$

---

4. Les ingénieurs utilisent souvent l'expression "champ d'autocontraintes" pour désigner les champs de contraintes autoéquilibrés.

effectivement occupée par la matière de la plaque ; dans les théories classiques elle se déplace comme un corps rigide ; on note  $\vec{k}$  son vecteur unitaire qui coïncide avec  $\vec{e}_3$  dans la configuration de référence.

Ce point de vue est proche de celui des frères Cosserat [24]. Une plaque est donc une famille de segments de droite rigides  $\mathcal{N}(x_1, x_2)$  qui, dans la configuration de référence, sont parallèles à l'axe des  $z$  et centrés sur le plan  $(x_1, O, x_2)$ . Pour les frères Cosserat une "surface matérielle" est une famille de trièdres qui dépendent continuellement des deux variables d'espace  $x_1$  et  $x_2$ , tandis que pour nous la rotation de la normale autour de son axe est indifférente ; ainsi sa position dépend-elle de cinq paramètres seulement : trois de translation et deux de rotation.

Le déplacement rigide (et infinitésimal) d'une normale est alors défini par le vecteur déplacement  $\vec{U}_c$  de son centre, dont on note ordinairement<sup>5</sup>  $(v_1, v_2, w)$  les composantes, et par deux angles de rotation qu'il s'avère commode de remplacer par les produits scalaires :

$$\beta_1 = \vec{k} \cdot \vec{e}_1 \quad ; \quad \beta_2 = \vec{k} \cdot \vec{e}_2 \quad (1.19)$$

Cette convention de signe sur  $\beta$  est opposée à celle choisie dans [3] ; pour faciliter les comparaisons nous adoptons maintenant celle utilisée par J.L.Batoz et G.Dhatt dans leur excellent livre [4] ainsi que par E. Reissner dans ses articles historiques, en particulier : [15], [16], [17], [20].

$\beta_1$  et  $\beta_2$  sont donc nuls dans la configuration de référence. On note que  $\vec{\omega} = -\beta_2 \vec{e}_1 + \beta_1 \vec{e}_2$  est le vecteur rotation qui fait passer de  $\vec{e}_3$  à  $\vec{k}_3$  :  $\vec{k} = \vec{e}_3 + \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3$ . Selon le contexte on appellera donc "déplacement généralisé" tantôt le quintuplet de variables scalaires :

$$q = (v_1, v_2, w, \beta_1, \beta_2) \quad (1.20)$$

tantôt le triplet de variables, l'une scalaire,  $w$ , les deux autres vectorielles,  $\vec{v}$  et  $\vec{\beta}$  :

$$q = (\vec{v}, w, \vec{\beta}) \text{ où : } \vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 \quad (1.21)$$

Le scalaire  $w$  est traditionnellement nommé "*flèche de la plaque*". Lorsqu'on définit  $w$  comme le déplacement vertical du milieu de la normale matérielle soit :  $w = U_3(x_1, x_2, 0)$  la surface  $(x_1, x_2, w(x_1, x_2))$  se nomme "*surface moyenne déformée*", terme d'emploi courant. Lorsque nous définirons  $w$  par  $w(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} U_3(x_1, x_2, z) dz$  nous préférons parler de "*surface déformée moyenne*".

On notera  $\mathbb{U}_R$  l'espace des champs de déplacements généralisés définis sur  $\Omega$  et, au moins au sens de la trace, sur la frontière  $\partial\Omega$ .<sup>6</sup>

5. Nous verrons plus loin que nous choisirons de définir  $w$  comme la moyenne de  $U_3$  sur l'épaisseur

6. On ne précise pas encore le choix fonctionnel de  $\mathbb{U}_R$ .

Le champ  $\vec{v}$  peut être nommé "déplacement plan"<sup>7</sup>, tandis que le couple  $(w, \vec{\beta})$  constitue le déplacement de flexion. Cette prise en compte, par la variable  $\vec{\beta}$ , de l'inclinaison de la normale sur le plan  $(x_1, 0, x_2)$  conduit à la théorie des plaques fléchies avec "*cisaillement transverse*", nommée usuellement "modèle CT" mais que nous nommerons plutôt "modèle R", en hommage à E. Reissner [15]. Plus simplement, dans la théorie élémentaire des plaques (modèle K), on suppose l'égalité :

$$\text{grad}^{(2)} w + \vec{\beta} = 0 \quad (1.22)$$

Elle signifie que les normales restent orthogonales à la surface moyenne déformée. Il n'y a plus alors que trois composantes du déplacement généralisé qui s'écrit  $q = (v_1, v_2, w)$  ; nous retrouverons cette situation à l'alinéa 1.3.

Dans le modèle R les déplacements généralisés de corps rigide  $(\vec{v}, w, \vec{\beta})$  constituent un espace vectoriel notés  $\mathbb{U}_R^s$  ; ils sont définis par une translation de composantes  $(v_1^0, v_2^0, w^0)$  et par un vecteur rotation de composantes  $(-\beta_2^0, \beta_1^0, \theta^0)$  avec :

$$\begin{aligned} \vec{v}(x_1, x_2) &= (v_1^0 - \theta^0 x_2) \vec{e}_1 + (v_2^0 + \theta^0 x_1) \vec{e}_2 \\ w(x_1, x_2) &= w^0 - x_1 \beta_1^0 - x_2 \beta_2^0 \\ \vec{\beta}(x_1, x_2) &= \vec{\beta}^0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

## 1.2.2 Efforts extérieurs généralisés

L'espace produit  $\mathbb{V}_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_2$  est muni du produit scalaire naturel :

$$\begin{aligned} \left( (\vec{v}, w, \vec{\beta}), (\vec{g}, p, \vec{c}) \right) &\in (\mathbb{V}_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_2) \times (\mathbb{V}_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_2) \longmapsto \\ \langle (\vec{v}, w, \vec{\beta}), (\vec{g}, p, \vec{c}) \rangle_\Omega &= \vec{v} \cdot \vec{g} + w p + \vec{\beta} \cdot \vec{c} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.24)$$

La densité surfacique de travail virtuel d'un effort extérieur exercé dans  $\Omega$  est alors définie à l'aide du quintuplet  $Q_\Omega = (g_1, g_2, p, c_1, c_2)$  dont les trois premières composantes sont des densités surfaciques scalaires de force associées aux composantes de translation, et les deux dernières des densités surfaciques scalaires de couple associées aux composantes de rotation. Comme pour le déplacement on peut aussi considérer le triplet  $(\vec{g}, p, \vec{c})$ . La densité surfacique de puissance virtuelle est alors, par définition :

$$\langle \delta q \mid Q_\Omega \rangle_\Omega = \delta \vec{v} \cdot \vec{g} + \delta w p + \delta \vec{\beta} \cdot \vec{c} \quad (1.25)$$

---

7. ou encore, fréquemment, "déplacement de membrane"

De même, sur le contour  $\partial\Omega$ , on définit une densité linéique de puissance virtuelle par :

$$\langle \delta q \mid Q_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega} = \delta \vec{v} \cdot \vec{G} + \delta w \, P + \delta \vec{\beta} \cdot \vec{C} \quad (1.26)$$

où le triplet  $Q_{\partial\Omega} = (\vec{G}, P, \vec{C})$  est constitué de densités linéiques de force et de couple<sup>8</sup>.

On nommera "charge", ou "effort extérieur généralisé", le sextuplet :

$$Q = (Q_\Omega, Q_{\partial\Omega}) = (\vec{g}, p, \vec{c}, \vec{G}, P, \vec{C}) \quad (1.27)$$

On notera  $\mathbb{F}_R$  un espace de champs  $Q$  ; il est mis en dualité avec l'espace  $\mathbb{U}_R$  par la forme bilinéaire :

$$(q, Q) \in \mathbb{U}_R \times \mathbb{F}_R \mapsto \langle q, Q \rangle_q = \int_\Omega \langle q \mid Q_\Omega \rangle_\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle q \mid Q_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega} \quad (1.28)$$

### 1.2.3 Déformations généralisées

On choisit pour variable de déformation le triplet :

$$\zeta = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}, \vec{\gamma}) \in \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{V}_2 \quad (1.29)$$

où  $\vec{\epsilon}^m$  est la "déformation de membrane",  $\vec{\chi}$  un tenseur de type courbure,  $\vec{\gamma}$  le "vecteur de cisaillement transverse".

#### *Opérateur déformation pour le modèle R*

On choisira un espace des champs de déformations généralisées

$$x \in \Omega \mapsto \zeta(x) \in \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{V}_2$$

tel qu'existe l'opérateur de déformation de plaque :

$$\mathcal{D}_R : \mathbb{U}_R \mapsto \mathbb{E}_R \quad (1.30)$$

défini par le système différentiel :

$$\zeta = \begin{cases} \vec{\epsilon}^m = \text{grad}_s^{(2)} \vec{v} \\ \vec{\chi} = \text{grad}_s^{(2)} \vec{\beta} \\ \vec{\gamma} = \text{grad}^{(2)} w + \vec{\beta} \end{cases} \quad (1.31)$$

---

8. rappelons que nous avons décidé d'omettre la notation de la trace



La quantité  $-\vec{\chi}$  est du type tenseur de courbure ; elle ne coïncide pas, en général, avec le tenseur de courbure de la surface moyenne déformée qui vaut en effet :

$$\text{grad}^{(2)} \text{grad}^{(2)} w = -\vec{\chi} + \text{grad}^{(2)} \vec{\gamma} \quad (1.32)$$

On nomme déformations généralisées de la plaque les trois composantes du triplet  $\zeta$  ou, selon le contexte,  $\zeta$  lui-même. On vérifie immédiatement que l'espace des déplacements généralisés solidifiants  $\mathbb{U}_R^s$ , caractérisé par les équations (1.23), est bien dans le noyau de  $\mathcal{D}_R$ .

Inversement si le champ  $\zeta$  est nul alors, d'après la relation (1.31) on a  $\vec{\beta} = -\text{grad}^{(2)} w$  puisque  $\vec{\gamma}$  est nul ; ensuite, puisque  $\vec{\chi}$  est nul,  $\text{grad}^{(2)} \text{grad}^{(2)} w = -\vec{\chi}$  est nul ;  $w$  est donc une fonction affine de  $(x_1, x_2)$ , de gradient constant  $-\vec{\beta}^0$ , comme écrit dans (1.23). Enfin la nullité de  $\vec{\epsilon}^m$  entraîne classiquement que le déplacement plan  $\vec{v}$  est solidifiant, c'est-à-dire de la forme précisée par (1.23).

### Proposition 1

*Le noyau de l'opérateur déformation  $\mathcal{D}_R$  défini par le système (1.31) est l'espace des déplacements solidifiants caractérisés par le système (1.23)*

## 1.2.4 Contraintes généralisées

Ainsi qu'on l'a fait pour les efforts généralisés exercés dans  $\Omega$ , on définit les contraintes généralisées comme les coefficients de la densité surfacique de puissance virtuelle des efforts intérieurs.

*On introduit la variable  $Z$ , nommée "contrainte généralisée" :*

$$Z = (\vec{N}, \vec{M}, \vec{T}) \in \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{V}_2 \quad (1.33)$$

*et l'on pose que la densité surfacique de puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit :*

$$\langle \delta \zeta \parallel Z \rangle_\Omega = -(\delta \vec{\epsilon}^m : \vec{N} + \delta \vec{\chi} : \vec{M} + \delta \vec{\gamma} \cdot \vec{T}) \quad (1.34)$$

*On choisit enfin un espace  $\mathbb{S}_R$  de champs de contraintes généralisées tel que la forme bilinéaire suivante existe :*

$$(\zeta, Z) \in \mathbb{E}_R \times \mathbb{S}_R \mapsto \langle \zeta, Z \rangle_\zeta = \int_\Omega \langle \zeta \parallel Z \rangle_\Omega \quad (1.35)$$

Le tenseur  $\vec{\vec{N}}$  est celui des contraintes de membrane. Traditionnellement  $\vec{\vec{M}}$  et  $\vec{T}$  sont nommés respectivement "tenseur de flexion-torsion" et "effort tranchant".

*L'équation d'équilibre entre une charge  $Q$  et une contrainte généralisée  $Z$  s'écrit en annulant la somme de leurs puissances virtuelles pour des champs de déplacements généralisés  $\delta q$  et de déformations généralisées  $\delta \zeta$  "compatibles" entre eux, c'est-à-dire solutions de (1.10) :*

$$\forall \delta q \in \mathbb{U}_R : \langle \delta q, Q \rangle_q + \langle \mathcal{D}_R \delta q, Z \rangle_\zeta = 0 \quad (1.36)$$

ou, de façon équivalente si l'opérateur transposé  $\mathcal{D}_R^T$  existe pour le choix qu'on a fait des espaces fonctionnels :

$$\mathcal{D}_R^T Z + Q = 0 \quad (1.37)$$

On peut illustrer la structure algébrique du modèle R par le diagramme de dualité de la figure 1.3, identique, à l'indice  $R$  près, au diagramme de la figure 1.2 :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{D}_R^T)^o = \mathbb{U}_R^s = \ker(\mathcal{D}_R) \subset \mathbb{S}_R & \langle \cdot, \cdot \rangle_q & \mathbb{F}_R \supset (\mathbb{U}_R^s)^o \supseteq \mathcal{D}_R^T(\mathbb{S}_R) \\ & \mathcal{D}_R \downarrow & \uparrow \mathcal{D}_R^T \\ \mathcal{D}_R(\mathbb{U}_R) \subseteq (\ker \mathcal{D}_R^T)^o \subset \mathbb{E}_\mathbb{R} & \langle \cdot, \cdot \rangle_\zeta & \mathbb{S}_R \supset (\mathcal{D}_R \mathbb{U}_R)^o = \ker(\mathcal{D}_R^T) \end{array}$$

FIGURE 1.3 – Dualité à quatre espaces pour le modèle R

### 1.2.5 Équations différentielles de l'équilibre pour le modèle R

En explicitant l'équation d'équilibre (1.36) à l'aide du théorème flux-divergence et en utilisant un processus classique d'identification on obtient facilement (cf. annexe 1.4.1) l'expression de l'opérateur  $\mathcal{D}_R^T$  en termes d'équations différentielles et de conditions à la frontière :

#### Proposition 2

*Les équations différentielles suivantes explicitent l'opérateur  $\mathcal{D}_R^T$  :*

*Équations de membrane*

$$\text{dans } \Omega : \quad \operatorname{div}^{(2)} \vec{N} = -\vec{g} \quad (1.38)$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \quad \vec{N} \cdot \vec{n} = \vec{G} \quad (1.39)$$

*Équations de flexion*

$$\text{dans } \Omega : \quad \operatorname{div}^{(2)} \vec{T} = -p \quad (1.40)$$

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{M} - \vec{T} = -\vec{c} \quad (1.41)$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \quad \vec{T} \cdot \vec{n} = P \quad (1.42)$$

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = \vec{C} \quad (1.43)$$

On note que les équations de membrane et celles de flexion forment deux groupes indépendants, qui, toutefois, seront souvent couplés par la loi de comportement du matériau dans l'écriture du système d'équations complet.

On a donc construit pour la plaque (figure 1.3) le même diagramme de dualité à quatre espaces que pour le solide tridimensionnel (figure 1.2). On construira au chapitre 3 le dispositif qui permet de faire communiquer les deux diagrammes. Auparavant donnons quelques indications sur la théorie élémentaire de la flexion.

### 1.3 La théorie élémentaire de la flexion : modèle K (comme Kirchhoff)

Pour alléger l'exposé ignorons le déplacement de membrane dont le traitement est identique à celui du modèle R. Nous ne nous intéressons qu'aux composantes de flexion  $w$  et  $\vec{\beta}$ .

#### 1.3.1 Déplacements et déformations généralisés

La théorie élémentaire, dite de flexion simple, suppose que la normale reste orthogonale à la surface moyenne déformée, c'est à dire que  $\vec{\beta} = -\operatorname{grad}^{(2)} w$ . Le déplacement généralisé se réduit donc à la seule composante  $w$  et la déformation généralisée au seul tenseur  $\vec{\chi}$  avec pour opérateur de déformation  $\mathcal{D}_K = -\operatorname{grad}^{(2)} \operatorname{grad}^{(2)}$  :

$$\vec{\chi}_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.44)$$

Le noyau de  $\mathcal{D}_K$  est l'espace des fonctions affines du couple  $(x_1, x_2)$ . Il est donc de dimension 3, comme dans le modèle R sans déplacement de membrane.

On notera respectivement  $\mathbb{U}_K$  et  $\mathbb{E}_K$  les espaces fonctionnels choisis pour les déplacements généralisés  $w$  et pour les déformations généralisées  $\vec{\chi}$ , espaces choisis en sorte que  $\mathcal{D}_K$  soit une application de  $\mathbb{U}_K$  dans  $\mathbb{E}_K$ .

### 1.3.2 Contraintes et efforts généralisés

Comme dans le modèle comportant du cisaillement transverse la contrainte généralisée associée au tenseur de courbure est le tenseur de flexion-torsion  $\vec{M}$  qui développe la puissance virtuelle exprimée par la forme bilinéaire :

$$\langle \delta \vec{\chi}, \vec{M} \rangle_{\chi} = - \int_{\Omega} \delta \vec{\chi} : \vec{M} \quad (1.45)$$

Les efforts extérieurs considérés sont de la forme  $f = (p, \vec{c}, P, \vec{C})$  où :

- $p \vec{e}_3$  est une densité surfacique de force (distribution sur  $\Omega$ ),
- $\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$  est une densité surfacique de couple (distribution sur  $\Omega$ ) qui développe la puissance virtuelle  $\int_{\Omega} \text{grad}^{(2)} \delta w \cdot \vec{c}$ ,
- $P \vec{e}_3$  est une densité linéique de force (distribution sur  $\partial\Omega$ ),
- $\vec{C}$  est une densité linéique de couple (distribution sur  $\partial\Omega$ ) qui développe la puissance virtuelle  $\int_{\partial\Omega} \text{grad}^{(2)} \delta w \cdot \vec{C}$ .

Ce dernier vecteur, qu'on écrit sous la forme  $\vec{C} = C_n \vec{n} + C_t \vec{t}$ , a la dimension d'une force. La vraie densité de couple est le vecteur  $\vec{C} = C_n \vec{n} - C_t \vec{t}$  puisque le vecteur rotation du trièdre  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{k})$  est le vecteur  $dw/ds \vec{n} - dw/dn \vec{t}$ .

### 1.3.3 Dualité pour le modèle K

On notera cette fois  $\mathbb{F}_K$  l'espace des efforts  $f$  et  $\mathbb{S}_K$  celui des contraintes généralisées  $\vec{M}$  ; ils sont respectivement mis en dualité avec  $\mathbb{U}_K$  et  $\mathbb{E}_K$  par les formes bilinéaires :

$$(w, f) \in \mathbb{U}_K \times \mathbb{F}_K \mapsto \langle w, f \rangle_w = \int_{\Omega} (w p + \text{grad}^{(2)} w \cdot \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} (w P + \text{grad}^{(2)} w \cdot \vec{C}) \quad (1.46)$$

$$(\vec{\chi}, \vec{M}) \in \mathbb{E}_K \times \mathbb{S}_K \mapsto \langle \vec{\chi}, \vec{M} \rangle_{\chi} = - \int_{\Omega} \vec{\chi} \cdot \vec{M} \quad (1.47)$$

Étudions maintenant l'opérateur transposé  $\mathcal{D}_k^T$ .

### 1.3.4 Équations différentielles de l'équilibre pour le modèle K

En utilisant comme précédemment le théorème flux-divergence on obtient facilement l'expression de l'opérateur  $\mathcal{D}_R^K$  en termes d'équations différentielles et de conditions à la frontière (cf.annexe 1.4.2) :

#### Proposition 3

*Les équations différentielles suivantes explicitent l'opérateur  $\mathcal{D}_K^T$  :*

$$\text{dans } \Omega : \quad \operatorname{div}^{(2)} \operatorname{div}^{(2)} \vec{M} = -p + \operatorname{div}^{(2)} \vec{c} \quad (1.48)$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \quad \vec{n} \cdot \operatorname{div}^{(2)} \vec{M} + \frac{d(\vec{t} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n})}{ds} = P - \frac{dC_T}{ds} + \vec{c} \cdot \vec{n} \quad (1.49)$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \quad \vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} = -C_N \quad (1.50)$$

### 1.3.5 Remarques sur les conditions aux limites

Dans la théorie de Reissner les conditions d'équilibre sur la frontière sont trois équations scalaires écrites en (1.39, 1.42, 1.43) ; dans celle de Kirchhoff elles ne sont que deux : (1.49, 1.50).

Dans ses débuts (Lagrange, Sophie Germain) la théorie des plaques était du type de Kirchhoff et pouvait se résumer (pour une plaque élastique et isotrope) à l'équation de Lagrange :

$$(\Delta^{(2)})^2 w = p$$

où  $\Delta^{(2)}$  est le laplacien bidimensionnel. C'est une équation elliptique d'ordre 4 qu'on doit compléter par deux conditions aux limites scalaires, comme dans la théorie de Kirchhoff. On trouvait paradoxal de ne disposer que de deux conditions scalaires alors qu'intuitivement le mécanicien aurait aimé écrire les relations (1.42, 1.43).

En fait, comme l'explique Reissner [20], la condition (1.49) "contracte" (1.42) et la composante tangentielle de (1.43) ; le système différentiel qui découle de la théorie de Reissner est d'ordre 6, les trois fonctions inconnues étant régies par trois équations du second ordre, à savoir, dans le cas homo-

gène et isotrope :

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \right) = -p \\
& \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \\
& \quad - \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \beta_1 \right) = -c_1 \\
& \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \\
& \quad - \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \beta_2 \right) = -c_2
\end{aligned}$$

## 1.4 Annexes du chapitre 1

### 1.4.1 Démonstration des équations différentielles d'équilibre pour le modèle R

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est a été définie par (1.34) :

$$\langle \mathcal{D}_R \delta q, Z \rangle_\zeta = - \int_\Omega \vec{N} : \text{grad}_s^{(2)} \delta \vec{v} - \int_\Omega \vec{M} : \text{grad}_s^{(2)} \delta \vec{\beta} - \int_\Omega \vec{T} \cdot (\text{grad}^{(2)} \delta w + \delta \vec{\beta})$$

On développe successivement les trois termes à l'aide du théorème flux-divergence :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{N} : \text{grad}_s^{(2)} \delta \vec{v} &= \int_\Omega \left( \text{div}^{(2)}(\vec{N} \cdot \delta \vec{v}) - (\text{div}^{(2)} \vec{N}) \cdot \delta \vec{v} \right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{N} \cdot \delta \vec{v} - \int_\Omega (\text{div}^{(2)} \vec{N}) \cdot \delta \vec{v} \\
\int_\Omega \vec{M} : \text{grad}_s^{(2)} \delta \vec{\beta} &= \int_\Omega \left( \text{div}^{(2)}(\vec{M} \cdot \delta \vec{\beta}) - (\text{div}^{(2)} \vec{M}) \cdot \delta \vec{\beta} \right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \delta \vec{\beta} - \int_\Omega \text{div}^{(2)} \vec{M} \cdot \delta \vec{\beta} \\
\int_\Omega \vec{T} \cdot (\text{grad}^{(2)} \delta w + \delta \vec{\beta}) &= \int_\Omega \left( \text{div}^{(2)}(\vec{T} \delta w) - \delta w \text{div}^{(2)} \vec{T} + \vec{T} \cdot \delta \vec{\beta} \right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{T} \delta w - \int_\Omega (\delta w \text{div}^{(2)} \vec{T} - \vec{T} \cdot \delta \vec{\beta}) \delta \vec{\beta}
\end{aligned}$$

D'autre part la puissance virtuelle des efforts extérieurs est :

$$\int_\Omega (\delta \vec{v} \cdot \vec{g} + \delta w p + \delta \vec{\beta} \cdot \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} \delta \vec{v} \cdot \vec{G} + \delta w P + \delta \vec{\beta} \cdot \vec{C}$$

La puissance virtuelle totale doit être nulle à l'équilibre quelles que soient les variations  $\delta \vec{v}$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \vec{\beta}$ .

Dans un premier temps on choisit ces dernières à support compact contenu dans  $\Omega$ , ce qui conduit aux équations sur l'intérieur de ce domaine.

Ensuite, la contribution de l'intérieur à la puissance virtuelle étant nulle celle de la frontière doit s'annuler aussi, quelles que soient les variations des "traces"  $\delta \vec{v}$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \vec{\beta}$ . On obtient ainsi les conditions d'équilibre sur  $\partial\Omega$ .

### 1.4.2 Démonstration des équations différentielles d'équilibre pour le modèle K

En effet la puissance virtuelle des contraintes généralisées est l'intégrale :

$$W_{int} = \int_{\Omega} \vec{M} : grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w$$

qu'on développe en utilisant les formules classiques :

$$\begin{aligned} \vec{M} : grad^{(2)} grad^{(2)} w = \\ div^{(2)}(\vec{M} \cdot grad^{(2)} w) - div^{(2)}(w div^{(2)}(\vec{M})) + w div^{(2)} div^{(2)} \vec{M} \end{aligned}$$

et, sur le contour  $\partial\Omega$  :

$$grad^{(2)} w = \frac{dw}{dn} \vec{n} + \frac{dw}{ds} \vec{t}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} W_{int} = \int_{\partial\Omega} \left( -\delta w \vec{n} \cdot div^{(2)} \vec{M} + \frac{d\delta w}{ds} \vec{t} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} + \frac{d\delta w}{dn} \vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} \right) + \\ \int_{\Omega} \delta w div^{(2)} div^{(2)} \vec{M} \end{aligned}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs est par définition :

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{d\delta w}{dn} C_N + \frac{d\delta w}{ds} C_T + \delta w P \right) + \int_{\Omega} (\delta w p + grad^{(2)} \delta w \cdot \vec{c})$$

qui s'écrit, après intégration par parties :

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{d\delta w}{dn} C_N + \frac{d\delta w}{ds} C_T + \delta w (P + \vec{c} \cdot \vec{n}) \right) + \int_{\Omega} \delta w (p - div^{(2)} \vec{c})$$

La puissance virtuelle totale est donc :

$$W_{tot} = \int_{\Omega} \delta w (\text{div}^{(2)} \text{div}^{(2)} \vec{M} + p - \text{div}^{(2)} \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} \left[ \delta w (-\vec{n} \cdot \text{div}^{(2)} \vec{M} + P + \vec{c} \cdot \vec{n}) + \frac{d\delta w}{ds} (\vec{t} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} + C_T) + \frac{d\delta w}{dn} (\vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} + C_N) \right]$$

On doit encore transformer l'expression précédente parce que les quantités  $\delta w$  et  $\delta w/ds$  ne sont pas indépendantes sur le contour fermé  $\partial\Omega$  ; on peut toutefois intégrer par parties le deuxième terme de l'intégrale sur celui-ci ; il vient :

$$W_{tot} = \int_{\Omega} \delta w (\text{div}^{(2)} \text{div}^{(2)} \vec{M} + p - \text{div}^{(2)} \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} \left[ \delta w \left( -\vec{n} \cdot \text{div}^{(2)} \vec{M} + P + \vec{c} \cdot \vec{n} - \frac{d}{ds} (\vec{t} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} + C_T) \right) + \frac{d\delta w}{dn} (\vec{n} \cdot \vec{M} \cdot \vec{n} + C_N) \right] \quad (1.51)$$

En annulant  $W_{tot}$ , forme linéaire du couple de fonctions indépendantes  $\delta w$  et  $\delta w/dn$ , on obtient le système présenté dans l'alinéa 1.3.4.



## Chapitre 2

# Compatibilité des déformations

Pour le modèle tridimensionnel et pour celui de Reissner nous allons établir les conditions d'intégrabilité des champs de déformations (ordinaires ou généralisées), d'une part sous la forme de relations différentielles comme on les trouve dans les ouvrages classiques, d'autre part sous forme "variationnelle" c'est à dire en exprimant la nullité de certaines formes bilinéaires. Cette dernière voie doit presque tout à l'article fondateur de J.J.Moreau ([27]). Elle permet de couvrir sans difficulté particulière les cas de domaines multiplement connexes, comme celui de liaisons linéaires auxquelles le solide est éventuellement assujetti.

### 2.1 Formulation différentielle de la compatibilité locale

#### 2.1.1 Rappel de résultats pour le solide tridimensionnel

Tous les ouvrages de mécanique des milieux continus s'intéressent à la "compatibilité" d'un champ de tenseurs de déformation  $\vec{\epsilon}$  à valeurs dans  $\mathbb{T}_2$  ou dans  $\mathbb{T}_3$ , c'est-à-dire aux conditions d'existence d'un champ de déplacements  $\vec{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{V}_2$  ou dans  $\mathbb{V}_3$  et tel que :

$$\vec{\epsilon} = \text{grad}_s \vec{U} \quad (2.1)$$

Classiquement les conditions citées dans les livres s'expriment à l'aide de relations différentielles dues à Saint-Venant ; on peut les écrire sous la forme indicelle (cf. L.Solomon [25], J. Salençon [26]) :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jl,ik} \quad (2.2)$$

Compte tenu des symétries, elles conduisent, en dimension 3, à six relations indépendantes déduites des deux suivantes par permutation circulaire :

$$2\epsilon_{12,12} - \epsilon_{11,22} - \epsilon_{22,11} = 0 \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{13,23} - \epsilon_{12,33} - \epsilon_{33,21} + \epsilon_{32,31} = 0 \quad (2.4)$$

En dimension 2 ces conditions se réduisent à la seule relation (2.3).

Il s'agit de conditions nécessaires qui deviennent suffisantes lorsque le domaine est simplement connexe. Lorsqu'il est multiplement connexe on doit écrire la nullité de certaines intégrales pour assurer l'existence d'un champ  $\vec{U}$  uniforme [25].

### 2.1.2 Formulation différentielle de la compatibilité locale pour le modèle de Reissner

On peut établir les conditions de compatibilité d'un champ de déformations généralisées sur toute partie simplement connexe de  $\Omega$  :

#### Proposition 4 Compatibilité locale des déformations généralisées

Soit  $\zeta = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}, \vec{\gamma})$  un champ de déformations généralisées défini sur l'ouvert simplement connexe  $\Omega$  et deux fois continûment différentiable ; pour qu'il existe un champ de déplacements généralisés  $q = (\vec{v}, w, \vec{\beta})$  tel que  $\zeta = \mathcal{D}_R(q)$ , c'est à dire solution du système :

$$\vec{\epsilon}^m = \text{grad}_s^{(2)} \vec{v} \quad (2.5)$$

$$\vec{\chi} = \text{grad}_s^{(2)} \vec{\beta} \quad (2.6)$$

$$\vec{\gamma} = \text{grad}^{(2)} w + \vec{\beta} \quad (2.7)$$

il est nécessaire et suffisant que  $\zeta$  soit solution du système suivant :

$$\epsilon_{22,12}^m + \epsilon_{11,22}^m - 2\epsilon_{12,12}^m = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma_{1,12} - \gamma_{2,11} + 2(\chi_{12,1} - \chi_{11,2}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\gamma_{2,12} - \gamma_{1,22} + 2(\chi_{12,2} - \chi_{22,1}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\chi_{22,11} + \chi_{11,22} - 2\chi_{12,12} = 0 \quad (2.11)$$

En effet, d'après ce qui précède, les conditions (2.8) et (2.11) sont nécessaires et suffisantes pour qu'existent  $\vec{v}$  et  $\vec{\beta}$  solutions respectives de (2.5) et de (2.6). Notons que  $\vec{v}$  et  $\vec{\beta}$  ne sont définis qu'à un déplacement rigide près, par exemple pour  $\vec{\beta}$  :

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}^1 + \vec{\beta}^0 - \theta^0 x_2 \vec{e}_1 + \theta^0 x_1 \vec{e}_2 \quad (2.12)$$

où  $\vec{\beta}^1$  désigne une solution particulière,  $\vec{\beta}^0$  et  $\theta^0$  des constantes arbitraires.

Il reste donc à montrer qu'il existe une fonction  $w$  et une détermination de  $\vec{\beta}$  solutions de (2.7) si et seulement si le couple  $(\vec{\gamma}, \vec{\chi})$  est solution du système (2.9, 2.10, 2.11).

Pour que (2.7) ait lieu il est nécessaire et suffisant que  $r = \text{rot}(-\vec{\beta} + \vec{\gamma})$  soit nul<sup>1</sup> :

$$r = 2\theta^0 - \beta_{2,1}^1 + \beta_{1,2}^1 + \gamma_{2,1} - \gamma_{1,2} = 0 \quad (2.13)$$

Pour que  $r$  soit nul il est nécessaire que son gradient soit nul :

$$-\beta_{2,11}^1 + \beta_{1,21}^1 + \gamma_{2,11} - \gamma_{1,21} = 0 \quad (2.14)$$

$$-\beta_{2,12}^1 + \beta_{1,22}^1 + \gamma_{2,12} - \gamma_{1,22} = 0 \quad (2.15)$$

et, pour la première composante par exemple, on vérifie que :

$$\beta_{2,11}^1 - \beta_{1,21}^1 = 2(\chi_{12,1} - \chi_{11,2}) \quad (2.16)$$

en sorte que les relations (2.9) et (2.10) sont équivalentes aux relations (2.14) et (2.15).

Inversement si ces dernières ont lieu le rotationnel  $r$  est une constante qu'on annule en choisissant :

$$\theta^0 = \frac{1}{2}(\beta_{2,1}^1 - \beta_{1,2}^1 + \gamma_{1,2} - \gamma_{2,1}) \quad (2.17)$$

Finalement, en accord avec (2.12), où  $\theta^0$  est maintenant déterminé,  $\vec{\beta}$  est défini à la constante arbitraire  $\vec{\beta}^0$  près tandis que  $w$  est définie à la fonction affine  $w^0 - \beta_1^0 x_1 - \beta_2^0 x_2$  près.

Les conditions différentielles de compatibilité locale pour le modèle de **Kircchoff** se déduisent des précédentes pour  $\vec{\gamma} = 0$ .

## 2.2 Compatibilité globale

### 2.2.1 Deux théorèmes de J.J.Moreau

Comme au chapitre 1 notons, pour  $\nu = 2$  ou  $3$  :  
 $E^\nu$  l'espace euclidien de dimension  $\nu$ ,  
 $T_\nu$  l'espace des tenseurs euclidiens symétriques sur  $E^\nu$ ,  
 $V_\nu$  l'espace des vecteurs de  $E^\nu$ ,

---

1. Nous utilisons la notation indicielle de la dérivation pour terminer cet alinéa

et notons aussi  $\Psi$  un ouvert quelconque de  $E^\nu$ ,  
 $D(\Psi, \mathbb{T}_\nu)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs dans  $\mathbb{T}_\nu$   
et de support compact contenu dans  $\Psi$ ,  
 $D'(\Psi, \mathbb{T}_\nu)$  l'espace des distributions sur  $\Psi$  à valeurs dans  $\mathbb{T}_\nu$ .  
On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire qui met en dualité  $D$  et  $D'$ .

On doit à Jean-Jacques Moreau [?] deux théorèmes qui couvrent la quasi-totalité des cas usuels<sup>2</sup>.  $\Omega$  désigne un ouvert de  $E^\nu$  avec  $\nu = 2$  ou  $3$  :

**Théorème 1 (J.J. Moreau 1979 "théorème 0")**

*Soit  $\vec{g} \in D'(\Omega, E^\nu)$  ; pour qu'il existe une distribution  $f \in D'(\Omega, \mathbb{R})$  telle que  $\vec{g} = \text{grad}^{(\nu)} f$  il est nécessaire et suffisant que  $\langle \vec{g}, \vec{u} \rangle = 0$  pour tout champ  $\vec{u} \in D(\Omega, \mathbb{V}_\nu)$  et de divergence nulle.*

**Théorème 2 (J.J. Moreau 1979 "théorème 1")**

*Soit  $\vec{\epsilon} \in D'(\Omega, \mathbb{T}_\nu)$  ; pour qu'il existe un  $\vec{u} \in D'(\Omega, \mathbb{V}_\nu)$  tel que  $\vec{\epsilon} = \text{grad}_s \vec{u}$  il est nécessaire et suffisant que, pour tout  $\vec{\sigma} \in D(\Omega, \mathbb{T}_\nu)$  et de divergence nulle on ait :*

$$\langle \vec{\epsilon}, \vec{\sigma} \rangle = 0 \quad (2.18)$$

**Remarque**

*On note l'absence d'hypothèse sur le connexité de l'ouvert  $\Omega$ .*

Notons que dans l'article en question Moreau nomme "théorème 0" le théorème 1 ; il lui sert en effet de préliminaire à la démonstration du théorème 2 qu'il nomme "théorème 1".

## 2.2.2 Compatibilité globale pour le modèle tridimensionnel

### Compatibilité globale en l'absence de liaisons

Revenons au schéma de dualité à quatre espaces présenté par la figure 1.2. En vertu de l'hypothèse 1 (§ 1.1.7) l'espace  $\mathbb{S}$  possède la propriété  $\mathcal{P}$  (§ 1.1.4). Le noyau  $\ker(\mathcal{D}^T)$  contient donc tous les champs  $\vec{\sigma} \in D(\Psi, \mathbb{T}_\nu)$  et de divergence nulle. D'où l'implication :

$$\vec{\epsilon} \in (\ker(\mathcal{D}^T))^o \Rightarrow \exists \vec{U} \in D'(\Psi, \mathbb{T}_\nu) : \vec{\epsilon} = \text{grad}^{(s)} \vec{U} \quad (2.19)$$

...mais rien ne dit, pour autant, que  $\vec{U}$  appartienne à  $\mathbb{U}$ . En particulier (2.19) ne définit  $\vec{U}$  qu'à l'addition près d'un  $\vec{V} \in \mathbb{U}^s$ .

---

2. c'est-à-dire lorsque les divers champs sont des distributions sur  $\Omega$

Pour l'assurer l'existence de  $\vec{U} \in \mathbb{U}$  nous ferons dans un premier temps l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 2

L'espace  $\mathbb{U}$  contient tous les champs de déplacements  $\vec{U} \in D'(\Psi, \mathbb{T}_\nu)$  tels que  $\text{grad}_s \vec{U} \in \mathbb{E}$ .

L'hypothèse 1 (§ 1.1.7) supposait que  $\mathcal{D}$  était une application de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{E}$  donc celui-ci suffisamment riche par rapport à celui-là ; inversement l'hypothèse 2 suppose  $\mathbb{U}$  suffisamment riche par rapport à  $\mathbb{E}$ . Elle implique en outre que le sous-espace  $\mathbb{U}^s$  contient tous les déplacements d'ensemble possibles, c'est-à-dire qu'il est bien de dimension 6 en tridimensionnel ( $\nu = 3$ ) ou de dimension 3 en bidimensionnel ( $\nu = 2$ ). Autrement dit le solide considéré n'est soumis à aucune liaison. On en déduit immédiatement le

### Corollaire 1

Si les hypothèses 1 (§ 1.1.7) et 2 (§ 2.2.2) sont vérifiées alors :

$$\mathcal{D}(\mathbb{U}) = \ker(\mathcal{D}^T)^\circ \quad (2.20)$$

### Compatibilité globale en présence de liaisons linéaires

Nous allons détailler les ingrédients de la figure 2.1.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_{\mathbb{V}} = \mathcal{D} \circ \mathcal{I} & & \mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T = \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}^T \\
 \mathbb{V} & \langle \cdot, \cdot \rangle_v & \mathbb{G} = \mathbb{F}/\mathbb{V}^\circ \\
 \mathcal{I} \downarrow & & \uparrow \mathcal{Q} \\
 \mathbb{V} \subset \mathbb{U} & \langle \cdot, \cdot \rangle_u & \mathbb{F} \supset \mathbb{V}^\circ \\
 \mathcal{D} \downarrow & & \uparrow \mathcal{D}^T \\
 \mathcal{D}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V}) = \mathcal{D}(\mathbb{V}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{E} & \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon & \mathbb{S} \supset \mathcal{D}(\mathbb{V})^\circ \supset \mathcal{D}(\mathbb{U})^\circ
 \end{array}$$

FIGURE 2.1 – Liaisons et compatibilité des déformations

Une propriété remarquable de la caractérisation des champs intégrables par dualité est qu'elle fonctionne encore lorsque le solide est soumis à des liaisons sans frottement linéaires (ou affines).

Notons en effet  $\mathbb{U}$  l'espace des champs de déplacements du solide libre de toute liaison et introduisons une liaison sans frottement définie par un sous-espace vectoriel fermé<sup>3</sup>  $\mathbb{V}$  du précédent et un point  $u^o \in \mathbb{U}$ . Le déplacement  $\vec{U}$  est assujéti à rester dans la variété affine  $u^o + \mathbb{V}$  tandis que l'effort de liaison est a priori quelconque dans l'orthogonal  $\mathbb{V}^o \subset \mathbb{F}$ .

On considère alors l'espace quotient  $\mathbb{G} = \mathbb{F}/\mathbb{V}^o$ , l'application canonique  $\mathcal{Q} : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{G}$  et la dualité quotient définie par la forme bilinéaire :

$$(\vec{V}, \psi) \in \mathbb{V} \times \mathbb{G} \mapsto \langle \vec{V}, \psi \rangle_v = \langle \vec{V}, \varphi \rangle_u \text{ où } \varphi \in \mathcal{Q}^{-1}(\psi) \quad (2.21)$$

On note  $\mathcal{I}$  l'injection de  $\mathbb{V}$  dans  $\mathbb{U}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbb{V}}$  la restriction de  $\mathcal{D}$  à  $\mathbb{V}$ . On a :

$$\mathcal{I}^T = \mathcal{Q} \quad ; \quad \mathcal{D}_{\mathbb{V}} = \mathcal{D} \circ \mathcal{I} \quad ; \quad \mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T = \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}^T \quad (2.22)$$

En termes de mécanique générale la dualité  $(\mathbb{U}, \langle \cdot, \cdot \rangle_u, \mathbb{F})$  décrit la situation où la liaison définie par  $\mathbb{V}$  est explicite et la dualité  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_v, \mathbb{G})$  celle où la liaison est implicite. La figure 2.1 résume la situation.

Établissons maintenant un second corollaire du théorème 2 de Moreau :

### Corollaire 2

*Si  $\mathbb{U}$  vérifie les hypothèses 1 (§ 1.1.7) et 2 (§ 2.2.2) du corollaire 1 (§ 2.2.2) et si  $\vec{\epsilon} \in \mathbb{E}$  est orthogonal au noyau de l'opérateur d'équilibre  $\ker(\mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T)$  alors il existe un champ  $\vec{V} \in \mathbb{V}$  tel que  $\vec{\epsilon} = \mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T(\vec{V})$ . En particulier l'image  $\mathcal{D}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V})$  est fermée.*

En effet on a d'après (2.22) :

$$\ker(\mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T) = (\mathcal{D}^T)^{-1}(\mathbb{V}^o) \quad (2.23)$$

et la suite d'assertions équivalentes :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \in \ker(\mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T) &\iff \vec{\sigma} \in (\mathcal{D}^T)^{-1}(\mathbb{V}^o) \iff \mathcal{D}^T \vec{\sigma} \in \mathbb{V}^o \\ &\iff \forall \vec{V} \in \mathbb{V} : \langle \mathcal{D}\vec{V}, \vec{\sigma} \rangle_{\epsilon} = \langle \vec{V}, \mathcal{D}^T \vec{\sigma} \rangle_v = 0 \iff \vec{\sigma} \in \mathcal{D}(\mathbb{V})^o \end{aligned}$$

qui aboutit à :

$$\ker(\mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T) = \mathcal{D}(\mathbb{V})^o \quad (2.24)$$

Ensuite si  $\vec{\epsilon}$  est orthogonal à  $\ker(\mathcal{D}_{\mathbb{V}}^T) = \mathcal{D}(\mathbb{V})^o$  il est a fortiori orthogonal à  $\mathcal{D}(\mathbb{U})^o$  et il existe, en vertu du corollaire 1, un champ  $\vec{V} \in \mathbb{U}$  avec  $\vec{\epsilon} = \mathcal{D}\vec{V}$ .

---

3. pour les topologies compatibles avec la dualité

Il reste à montrer que  $\vec{V}$  appartient effectivement à  $\mathbb{V}$ . En appliquant  $\mathcal{D}^T$  au deux membres de (2.24) puis en utilisant 2.23, on obtient l'égalité  $\mathbb{V}^o = \mathcal{D}^T(\mathcal{D}(\mathbb{V})^o)$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathbb{V}^o \exists \vec{\sigma} \in \mathcal{D}(\mathbb{V})^o : \mathcal{D}^T \vec{\sigma} &= \phi \\ \Rightarrow \langle \vec{V}, \phi \rangle_v = 0 &\Rightarrow \vec{V} \in (\mathbb{V}^o)^o = \mathbb{V} \end{aligned}$$

puisque  $\mathbb{V}$  est fermé, ce qui achève la démonstration.

### Remarque historique

La première caractérisation duale des champs de déformation compatibles semble due à Donati (Gurtin cite Donati dans l'ouvrage d'élasticité [28], lui-même cité par J.J. Moreau [27]), pour des champs  $\vec{\sigma} \in C^2(\Psi, \mathbb{T}_3)$  et un domaine  $\Psi$  simplement connexe, en l'absence de liaisons. Une démonstration simple consiste à utiliser le résultat classique :

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = 0 \iff \exists \vec{\tau} : \operatorname{div} \vec{\sigma} = \operatorname{rot} \operatorname{rot}^T \vec{\tau}$$

où l'opérateur  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}^T$  est son propre transposé :

$$\langle \vec{\epsilon}, \operatorname{rot} \operatorname{rot}^T \vec{\tau} \rangle_\epsilon = \langle \operatorname{rot} \operatorname{rot}^T \vec{\epsilon}, \vec{\tau} \rangle_\epsilon$$

L'orthogonalité de  $\vec{\epsilon}$  à tous les champs de contraintes  $\vec{\sigma}$  de divergence nulle conduit donc à  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}^T \vec{\epsilon} = 0$  qui n'est autre que la condition (2.2). Le cas des solides soumis à des liaisons exprimées sous forme explicite "concrète" comme par exemple :

$$\vec{V} = 0 \text{ sur } \partial_1 \Psi \subset \partial \Psi \quad (2.25)$$

est assez facile à traiter à partir du théorème de Donati. Le théorème de Moreau apporte un progrès et un confort certains pour le traitement des domaines multiplement connexes.

### 2.2.3 Compatibilité globale pour le modèle de Reissner

Rappelons les équations différentielles d'équilibre (2.37), en l'absence de charge, pour des champs de contraintes généralisées  $Z = (\vec{N}, \vec{M}, \vec{T})$  indéfiniment différentiables et de support compact contenu dans  $\Omega$  :

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{N} = 0 \quad (2.26)$$

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{T} = 0 \quad (2.27)$$

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{M} - \vec{T} = 0 \quad (2.28)$$

Notons  $\mathbb{J}_R$  l'ensemble des ces champs  $Z$ , évidemment contenu dans  $\ker(\mathcal{D}_R^T)$ .

**Proposition 5 Compatibilité globale en l'absence de liaisons**

Soit  $\zeta = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}, \vec{\beta})$  un champ de déformations généralisées ; pour qu'il existe un champ de déplacements généralisés  $q = (\vec{v}, w, \vec{\beta})$  tel que  $\zeta = \mathcal{D}_R(q)$  il est nécessaire et suffisant que  $\zeta$  soit orthogonal à  $\mathbb{J}_R$ .

De plus, si l'espace  $\mathbb{U}_R$  contient tous les champs de déplacements généralisés qui vérifient :

$$q = (\vec{v}, w, \vec{\beta}) \in D'(\Omega, \mathbb{V}_2) \times D'(\Omega, \mathbb{R}) \times D'(\Omega, \mathbb{V}_2) \longmapsto D_R(q) \in \mathbb{E}_R$$

alors  $q$  appartient à  $\mathbb{U}_R$  et l'image  $\mathcal{D}_R(\mathbb{U}_R)$  est fermée.<sup>4</sup>

En effet la condition est évidemment nécessaire puisque  $\mathbb{J}_R$  est contenu dans  $\mathcal{D}_R(\mathbb{U}_R)^o$ .

Ensuite l'orthogonalité de  $\zeta$  aux champs de la forme  $(\vec{N}, 0, 0) \in \mathbb{J}_R$  entraîne, d'après le théorème 2 de Moreau (§ 2), l'existence de  $\vec{v}$ , solution de 2.5 et défini à un déplacement plan près.

De même l'orthogonalité de  $\zeta$  aux champs de la forme  $(0, \vec{M}, 0) \in \mathbb{J}_R$  entraîne l'existence d'un champ  $\vec{\beta}$  solution de (2.6) et défini à un déplacement plan près de la forme explicitée par (2.12).

Il reste à établir l'existence d'une fonction  $w$  solution de (2.7).

Considérons alors les champs de contraintes généralisées de la forme  $Z = (0, \vec{M}, \vec{T}) \in D(\Omega, \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{V}_2)$  tels que :

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{M} - \vec{T} = 0 \tag{2.29}$$

$$\operatorname{div}^{(2)} \vec{T} = 0 \tag{2.30}$$

et exprimons maintenant leur orthogonalité à  $\zeta$  en utilisant la relation  $\chi = \operatorname{grad}_s^{(2)} \vec{\beta}$  ; il vient :

$$\langle \operatorname{grad}_s^{(2)} \beta, \vec{M} \rangle + \langle \vec{\gamma}, \vec{T} \rangle = 0 \tag{2.31}$$

et comme :

$$\langle \operatorname{grad}_s^{(2)} \beta, \vec{M} \rangle = -\langle \vec{\beta}, \operatorname{div}^{(2)} \vec{M} \rangle = 0 \tag{2.32}$$

on obtient finalement :

$$\langle -\vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{T} \rangle = 0 \tag{2.33}$$

pour tous les  $\vec{T}$  de divergence nulle. Nous sommes donc dans la situation du théorème 1 (1), ce qui assure l'existence de  $w$  solution de (2.7) et achève ainsi la démonstration.

---

4. Remarque : une hypothèse équivalente à l'hypothèse 2 (§ 2.2.2) est contenue dans cet énoncé. Nous n'avons pas jugé utile de lui donner une formulation séparée.



### Compatibilité en présence de liaisons linéaires.

La démonstration donnée pour le cas du solide tridimensionnel est purement algébrique ; elle s'applique donc aussi pour le modèle de Reissner et pour celui de Kirchhoff sur lequel nous allons maintenant donner un résultat de J.J. Moreau et M. Ros.

#### 2.2.4 Compatibilité globale pour le modèle de Kirchhoff

D'après les équations d'équilibre (1.3.4) les champs de moments auto-équilibrés et de support compact sont les solutions de  $\operatorname{div}^{(2)} \operatorname{div}^{(2)} \vec{M} = 0$ . Ils sont orthogonaux à tous les champs de courbure de la forme  $\vec{\chi} = -\operatorname{grad}^{(2)} \operatorname{grad}^{(2)} w$ . En effet, par définition de la dérivée d'une distribution, on a :

$$\langle w, M_{ij} \rangle = \langle w, M_{ij,ji} \rangle$$

La condition d'intégrabilité globale suivante est analogue aux précédentes pour les modèles R et 3D :

**Proposition 6 (J.J. Moreau et M. Ros) ([29])**

*Pour qu'un champ  $\vec{\chi}$  appartenant à  $D'(\Omega, \mathbb{T}_2)$  soit de la forme  $\vec{\chi} = -\operatorname{grad}^{(2)} \operatorname{grad}^{(2)} w$  où  $w \in D'(\Omega, \mathbb{R})$  il est nécessaire et suffisant que  $\langle \vec{\chi}, \vec{M} \rangle = 0$  pour tout  $\vec{M} \in D(\Omega, \mathbb{T}_2)$  tel que  $\operatorname{div}^{(2)} \operatorname{div}^{(2)} \vec{M} = 0$ .*

# Chapitre 3

## Du tridimensionnel au bidimensionnel

Dans ce chapitre on suppose que les composantes de la charge  $\Phi = (\vec{f}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  sont des fonctions sommables respectivement sur  $\Psi, \partial_1\Psi, \partial_2\Psi, \partial_3\Psi$ .

Le passage du tridimensionnel a principalement lieu sur les segments :

$$(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \longmapsto \mathcal{N}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z)/|z| \leq h(x_1, x_2)/2\} \quad (3.1)$$

par la prise de moments et de relèvements d'ordre 0 et 1, pour toutes les variables concernées, qu'elles soient géométriques ou sthéniques.

### 3.1 Moments et relèvements

On note :

#### Notations 1

- $\mathcal{H}$  l'intervalle fermé  $\mathcal{H} = [-h/2, h/2]$ ,
- $\text{Mes}(\mathcal{H})$  l'espace des mesures bornées sur  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- $\Delta_k = \{\lambda z^k, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , droite des monômes de degré  $k$ ,
- $I_X$  l'application identique sur un ensemble  $X$ .
- On pose, pour  $k$  naturel et  $d\mu \in \text{Mes}(\mathcal{H})$  :

$$J_k = \int_{-h/2}^{h/2} z^{2k} d\mu(z) \quad (3.2)$$

**Définition 1 Moments et relèvements**

On appelle moment d'ordre  $k$  de la mesure  $d\mu$  la fonctionnelle linéaire :

$$d\mu \in \mathcal{Mes}(\mathcal{H}) \longmapsto \mathcal{M}_k(d\mu) = \int_{\mathcal{H}} z^k d\mu(z) \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

et relèvement d'ordre  $k$  la mesure définie par la fonction :

$$m \in \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{R}_k(m) = \frac{m}{J_k} z^k \quad (3.4)$$

On nommera "moment réduit" d'ordre  $k$  le rapport  $\mathcal{M}_k/J_k$

Notons qu'on identifie la fonction  $\frac{m}{J_k} z^k$  à la mesure  $\frac{m}{J_k} z^k dz$  suivant l'usage courant dans la théorie des distributions. Dans ce qui suit  $d\mu$  est la mesure de Lebesgue lorsque la plaque est pleine ; pour les plaques creuses on choisit  $d\mu(z) = dz$  dans les intervalles occupés par la matière et  $d\mu(z) = 0$  dans les intervalles vides.

**Proposition 7**

Le relèvement et le moment d'ordre  $k$  vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k \mathcal{R}_k \mathcal{M}_k &= \mathcal{M}_k \\ \mathcal{R}_k \mathcal{M}_k \mathcal{R}_k &= \mathcal{R}_k \end{aligned} \quad (3.5)$$

qui font apparaître  $\mathcal{R}_k$  et  $\mathcal{M}_k$  comme des applications pseudo-inverses l'une de l'autre, ce qu'on note classiquement :

$$\mathcal{R}_k = \mathcal{M}_k^\dagger \quad (3.6)$$

La démonstration est immédiate. Il s'agit d'une définition générale des pseudo-inverses, telle qu'on peut la trouver dans [1]. Dans notre cas elle correspond à celle de Moore-Penrose [2]. En effet il résulte des relations (3.5) que  $\mathcal{M}_k \mathcal{R}_k$  et  $\mathcal{R}_k \mathcal{M}_k$  sont des projecteurs ; le premier est l'application identique  $I_{\mathbb{R}}$ , donc un projecteur orthogonal particulier (le supplémentaire orthogonal est réduit à l'origine) ; le second est un projecteur sur  $\mathcal{Mes}(\mathcal{H})$  dont le noyau

$$\ker(\mathcal{R}_k \mathcal{M}_k) = \{d\mu \in \mathcal{Mes}(\mathcal{H}) / \int_{\mathcal{H}} z^k d\mu(z) = 0\}$$

joue, dans  $\mathcal{Mes}(\mathcal{H})$ , le rôle d'un supplémentaire orthogonal de  $\mathcal{R}_k(\mathbb{R})$ .

## Extensions

Un peu plus généralement on peut considérer des mesures à valeurs dans  $\mathbb{R}^\nu$ . Par exemple  $d\vec{\mu} = \vec{U}dz$  pour une fonction  $\vec{U}$  sommable  $\vec{U} : R \mapsto \mathbb{R}^\nu$ . Moments et relèvements prennent alors leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^\nu$ , et les composantes sont traitées indépendamment les unes des autres.

Enfin ce qui précède fait implicitement l'hypothèse qu'on s'est placé en un point  $(x_1, x_2)$  de  $\Omega$  ou de sa frontière. La mesure peut évidemment dépendre de ce point, dont moments et relèvements deviennent alors des fonctions.

Même si l'on peut ne pas les mettre en évidence et se contenter de donner les formules sans autre commentaire, moments et relèvements jouent un rôle essentiel dans la correspondance entre modèles tridimensionnel et bidimensionnels.

## 3.2 Déplacement principal et déplacement complémentaire

Les hypothèses classiques de la théorie des plaques supposent la normale matérielle indéformable, à une déformation longitudinale  $\epsilon_{33}$  près.<sup>1</sup> Dans le modèle K de la flexion simple (Kirchhoff) le déplacement de la normale la laisse orthogonale à la déformée du plan moyen. Dans le modèle R (Reissner-Mindlin), plus général que le précédent, la normale reste indéformable mais peut s'incliner sur le plan tangent à la "surface moyenne déformée". Nous remplacerons cette dernière hypothèse par la recherche du segment de droite qui représente au mieux, au sens des moindres carrés, la position de la normale déformée. Cela conduit à la décomposition du champ de déplacements tridimensionnel  $\vec{U}$  en la somme :

$$\vec{U} = \vec{V} + \vec{u} \quad (3.7)$$

où le champ  $\vec{V}$  laisse les normales rigides : c'est "déplacement principal". La différence  $\vec{u}$  est le "déplacement complémentaire". Laissant les normales

---

1. Dans beaucoup d'exposés d'introduction à la théorie des plaques on introduit deux hypothèses mécaniquement contradictoires : " $\sigma_{33}$  est nulle" et " $\epsilon_{33}$  est nul". Il vaut mieux dire, par exemple, que  $\sigma_{33}$  est nulle et que  $\epsilon_{33}$  est négligeable. Cette seconde hypothèse est alors inutile puisque, d'après la première,  $\epsilon_{33}$  n'intervenant pas dans la puissance virtuelle, sa valeur devient indifférente.

rigides le déplacement principal est certainement de la forme<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}\vec{V}(x_1, x_2, z) &= v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 + w(x_1, x_2)\vec{e}_3 \\ &\quad + z\beta_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + z\beta_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 \\ &= \vec{v}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)\vec{e}_3 + z\vec{\beta}(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Pour achever de définir  $\vec{V}$  on le choisit en sorte qu'il minimise le carré du champ complémentaire, c'est-à-dire l'intégrale<sup>3</sup> :

$$||\vec{u}||^2 = \int_{-h/2}^{h/2} |\vec{U}(x_1, x_2, z) - \vec{V}(x_1, x_2, z)|^2 dz$$

On trouve que la quantité  $q = (\vec{v}, w, \vec{\beta})$  est une fonction linéaire  $A$  de  $\vec{U}$  :

$$q = A(\vec{U}) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} (v_1, v_2, w) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (U_1, U_2, U_3) dz \\ (\beta_1, \beta_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z (U_1, U_2) dz \end{cases} \quad (3.9)$$

Ainsi donc  $(v_1, v_2, w)$ , "déplacement moyen", est la moyenne (ou moment réduit d'ordre 0) de  $(U_1, U_2, U_3)$  tandis que  $(\beta_1, \beta_2)$ , "inclinaison moyenne", est le moment réduit d'ordre 1 de  $(U_1, U_2)$ . Les formules (3.8) et (3.9) font apparaître le déplacement principal  $\vec{V}$  comme la somme des relèvements des moments d'ordre 0 et 1, ce qui peut se noter :

$$\vec{V} = A^\dagger(q)$$

où  $A^\dagger$  est la pseudo-inverse de  $A$  associée aux relèvements des ces moments.

Par construction le champ complémentaire  $\vec{u}$  est solution des équations suivantes :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \vec{u} = 0 \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z u_1 = 0 \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z u_2 = 0 \quad (3.10)$$

c'est-à-dire que l'espace des déplacements complémentaire est le noyau :

$$\mathbb{U}_c = \ker(A) \quad (3.11)$$

On a aussi :

$$\mathbb{U}_p = A^\dagger A(\mathbb{U}) \quad ; \quad \mathbb{U}_c = (I_{\mathbb{U}} - A^\dagger A)(\mathbb{U}) \quad (3.12)$$

---

2. Rappelons que nous restons dans le cadre des petites transformations.

3. Contrairement à notre habitude nous conservons dans ce chapitre la notation de  $dz$ , mesure banale de Lebesgue, dans l'écriture des intégrales.

En notant  $\mathbb{U}_p$  l'espace des déplacements principaux on constate que  $\mathbb{U}_p$  et  $\mathbb{U}_c$  sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire naturel de  $\mathbb{U}$  :

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_p + \mathbb{U}_c \quad ; \quad (\vec{V}, \vec{u}) \in \mathbb{U}_p \times \mathbb{U}_c \mapsto \int_{\Psi} \vec{V} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.13)$$

En effet l'intégrale  $\int_{-h/2}^{h/2} \vec{V}(x_1, x_2, z) \cdot \vec{u}(x_1, x_2, z) dz$  est nulle pour presque tout  $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ .

La quantité  $q = (\vec{v}, w, \vec{\beta})$  est nommée "déplacement généralisé" du modèle R. On notera  $\mathbb{U}_R$  l'espace de ces déplacements généralisés.

Si l'on adopte le modèle K le couple  $q = (\vec{v}, w) \in \mathbb{U}_K$  est le déplacement généralisé tandis que le déplacement principal  $\vec{V}$  est encore donné par la relation (3.8) où  $\vec{\beta} = -grad^{(2)}w$ , soit :

$$\vec{V} = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 + w(x_1, x_2)\vec{e}_3 - z grad^{(2)}w \quad (3.14)$$

### 3.3 Efforts tridimensionnels et efforts généralisés

On a défini, au paragraphe 1.1.2, l'effort  $\Phi = (\vec{f}, \vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3)$  exercé sur le modèle tridimensionnel ; calculons sa puissance virtuelle dans la vitesse virtuelle principale  $\delta\vec{V}$  en utilisant les relations (1.8) et (3.8) ; il vient :

$$\langle \delta\vec{V}, \Phi \rangle_U = \int_{\Omega} (\delta\vec{v} \cdot \vec{g} + \delta w p + \delta\vec{\beta} \cdot \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} (\delta\vec{v} \cdot \vec{G} + \delta w P + \delta\vec{\beta} \cdot \vec{C}) \quad (3.15)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \vec{g} &= (F_1^1 + F_1^2)\vec{e}_1 + (F_2^1 + F_2^2)\vec{e}_2 + \int_{-h/2}^{h/2} (f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2) \\ p &= F_3^1 + F_3^2 + \int_{-h/2}^{h/2} f_3 \\ \vec{c} &= \frac{h}{2}(F_1^2 - F_1^1)\vec{e}_2 + \frac{h}{2}(F_2^1 - F_2^2)\vec{e}_1 + \int_{-h/2}^{h/2} z(f_1\vec{e}_2 - f_2\vec{e}_1) \\ \vec{G} &= \int_{-h/2}^{h/2} (F_1^3\vec{e}_1 + F_2^3\vec{e}_2) \\ P &= \int_{-h/2}^{h/2} F_3^3 \\ \vec{C} &= \int_{-h/2}^{h/2} z(F_1^3\vec{e}_2 - F_2^3\vec{e}_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Considérons les quatre systèmes d'efforts :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega}^{12} &= (f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2, F_1^1\vec{e}_1 + F_2^1\vec{e}_2, F_1^2\vec{e}_1 + F_2^2\vec{e}_2) \\ \Phi_{\Omega}^3 &= (f_3\vec{e}_3, F_3^1\vec{e}_3, F_3^2\vec{e}_3) \\ \Phi_{\partial\Omega}^{12} &= F_1^3\vec{e}_1 + F_2^3\vec{e}_2 \\ \Phi_{\partial\Omega}^3 &= F_3^3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Nous avons déjà défini l'effort généralisé (cf. 1.27) :

$$Q = (\vec{g}, p, \vec{c}, \vec{G}, P, \vec{C})$$

comme variable duale du déplacement généralisé  $q$ . On observe que :

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \mathcal{M}_0(\Phi_\Omega^{12}) \\ p &= \mathcal{M}_0(\Phi_\Omega^3) \\ \vec{c} &= \mathcal{M}_1(\Phi_\Omega^{12}) \\ \vec{G} &= \mathcal{M}_0(\Phi_{\partial\Omega}^{12}) \\ P &= \mathcal{M}_0(\Phi_{\partial\Omega}^3) \\ \vec{C} &= \mathcal{M}_1(\Phi_{\partial\Omega}^{12})\end{aligned}$$

Il est intéressant de reprendre la notion de normale matérielle (cf. 1.2.1) dont la rotation autour d'elle-même est indifférente. Considérons les segments matériels intérieurs :

$$(x_1, x_2) \in \Omega \longmapsto \mathcal{N}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z)/|z| \leq h(x_1, x_2)/2\}$$

Au sens des mesures sur  $\mathcal{N}(x_1, x_2)$ <sup>4</sup> on peut ajouter les efforts décrits par  $\Phi_\Omega^{12}$  et par  $\Phi_\Omega^3$ . Ainsi :

$$(\Phi_\Omega^{12}, \Phi_\Omega^3) \longmapsto \varphi_\Omega = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3 + (F_1^1 + F_1^2) \vec{e}_1 + (F_2^1 + F_2^2) \vec{e}_2 + (F_3^1 + F_3^2) \vec{e}_3$$

Les trois premiers termes sont répartis sur l'intérieur et les trois derniers des mesures concentrées aux extrémités. Alors  $\vec{g} + p \vec{e}_3$  en est le moment d'ordre 0 et  $\vec{c}$  en est le moment d'ordre 1.

Quant aux segments matériels périphériques :

$$(x_1, x_2) \in \partial\Omega, \longmapsto \mathcal{N}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z)/|z| \leq h(x_1, x_2)/2\}$$

ils ne sont soumis qu'à la mesure répartie<sup>5</sup> :

$$(\Phi_{\partial\Omega}^{12}, \Phi_{\partial\Omega}^3) \longmapsto \varphi_{\partial\Omega} = F_1^3 \vec{e}_1 + F_2^3 \vec{e}_2 + F_3^3 \vec{e}_3$$

dont  $\vec{G} + P \vec{e}_3$  et  $\vec{C}$  sont les moments d'ordres respectifs 0 et 1.

### Proposition 8

Les relations (3.16) définissent une application linéaire  $A^{\dagger T}$  :

$$\begin{aligned}\Phi \in \mathbb{F} &\longmapsto A^{\dagger T}(\Phi) = (\vec{g}, p, \vec{c}, \vec{G}, P, \vec{C}) \in \mathbb{F}_R \\ &\text{où :} \\ \mathbb{F}_R &= A^{\dagger T}(\mathbb{F})\end{aligned}\tag{3.17}$$

et  $A^{\dagger T}$  est effectivement la transposée de  $A^\dagger$ .

---

4. et dont les valeurs sont des densités surfaciques de force répartie sur  $\Omega$ .

5. dont la valeur est une densité linéique de force répartie sur  $\partial\Omega$ .

Le calcul du travail virtuel qui fait passer de (3.15) aux relations (3.16) montre en effet que :

$$\forall q \in \mathbb{U}_R \quad \forall \Phi \in \mathbb{F} \quad \langle A^\dagger q, \Phi \rangle_u = \langle q, A^{\dagger T} \Phi \rangle_q \quad (3.18)$$

et aussi que :

**Proposition 9**

*La transposée de  $A$  est définie par les formules :*

$$\mathcal{Q} = (\vec{g}, p, \vec{c}, \vec{G}, P, \vec{C}) \in \mathbb{F}_R \longmapsto A^T(\mathcal{Q}) = (\vec{f}_r, \vec{F}_r^1, \vec{F}_r^2, \vec{F}_r^3) \in \mathbb{F} \quad (3.19)$$

avec :

$$\vec{f} = \frac{\vec{g}}{h} + \frac{12}{h^3} \vec{c} z + \frac{p}{h} \vec{e}_3; \vec{F}_r^1 = \vec{F}_r^2 = 0; \vec{F}_r^3 = \frac{\vec{G}}{h} + \frac{12}{h^3} \vec{C} z + \frac{P}{h} \vec{e}_3 \quad (3.20)$$

On notera :

$$\mathbb{F}_r = A^T(\mathbb{F}_R)$$

$A^T$  est le relèvement des efforts généralisés; elle est aussi la pseudo-inverse de  $A^{\dagger T}$  :

$$A^T = (A^{\dagger T})^\dagger \quad (3.21)$$

**Proposition 10**

*L'image  $\mathbb{F}_r = A^T(\mathbb{F}_R)$  et le noyau  $\mathbb{U}_c = \ker(A)$  sont mutuellement polaires*

En effet, en utilisant (3.12), on a l'équivalence des cinq assertions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \vec{u} \in \mathbb{U}_c : \langle \vec{u}, \Phi \rangle_u &= 0 \\ \forall \vec{U} \in \mathbb{U} : \langle \vec{U} - A^\dagger A \vec{U}, \Phi \rangle_u &= 0 \\ \forall \vec{U} \in \mathbb{U} : \langle \vec{U}, \Phi - A^T A^{\dagger T} \Phi \rangle_u &= 0 \\ \Phi &= A^T A^{\dagger T} \Phi \\ \Phi &\in \mathbb{F}_r \end{aligned}$$

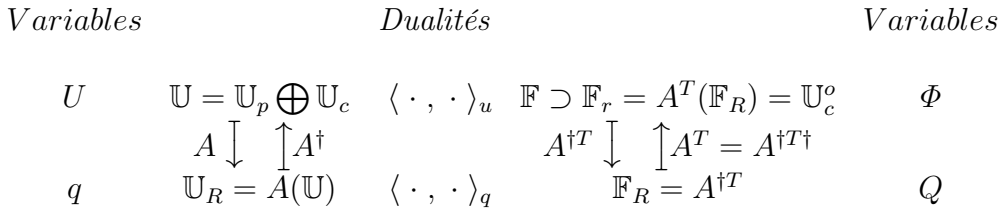


FIGURE 3.1 – Passage 3D-2D pour les déplacements et les charges

Le diagramme de la figure 3.1 résume la situation. Nous le compléterons (Figure 3.2) en introduisant deux autres couples de variables en dualités : (déformations généralisées - contraintes généralisées) d'une part, (déformations principales - contraintes tridimensionnelles) d'autre part.



### 3.4 Déformations tridimensionnelles et déformations généralisées

Calculons les "déformations principales"  $\vec{\epsilon}^p = grad_s \vec{V}$  engendrées par le champ de déplacements principal  $\vec{V}$  ; on trouve, écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vec{\epsilon}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + z \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + z \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + z \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \beta_1 \right) \\ sym. & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + z \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \beta_2 \right) \\ sym. & sym. & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Rappelons les formules qui définissent l'opérateur de déformation du modèle R (cf 1.31) :

$$\vec{\epsilon}^m = grad_s^{(2)} \vec{v} \quad ; \quad \vec{\chi} = grad_s^{(2)} \vec{\beta} \quad ; \quad \vec{\gamma} = grad^{(2)} w + \vec{\beta}$$

Considérons alors l'application <sup>6</sup> :

$$\vec{\epsilon}^p \in \mathbb{E} \mapsto \zeta = B(\vec{\epsilon}^p) = \begin{bmatrix} \vec{\epsilon}^m = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\epsilon}^{(2)} \\ \vec{\chi} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{\epsilon}^{(2)} \\ \vec{\gamma} = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_{13} \vec{e}_1 + \epsilon_{23} \vec{e}_2) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Sa pseudo-inverse  $B^\dagger$  fait passer des déformations généralisées aux déformations principales puisque (3.22) s'écrit aussi, sous forme matricielle :

$$[\epsilon^p] = \begin{bmatrix} [\epsilon^m + z\chi] & \{\gamma\} \\ < \gamma > & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

avec la notation courante pour les matrices-blocs : "[ ]" désigne un bloc rectangulaire, "{ }", une colonne, "< >" une ligne.

On note que :

1. le produit de composition  $B^\dagger \circ D_R \circ A$  est la restriction à  $\mathbb{U}_p$  de l'opérateur de déformation tridimensionnel  $D = grad_s$ , ce qui apparaît clairement sur le diagramme de la figure 3.2 ;
2. l'opérateur  $D_R$  est le produit de composition  $D \circ A^\dagger$

---

6. Rappelons que  $\vec{\epsilon}^{(2)}$  désigne la partie plane du tenseur  $\vec{\epsilon}$ .

<i>Var.</i>		<i>Dualités</i>		<i>Var.</i>
$\vec{U}$	$\mathbb{U} = \mathbb{U}_p \oplus \mathbb{U}_c$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_u$	$\mathbb{F} \supset A^T(\mathbb{F}_R) = \mathbb{U}_c^o$	$\Phi$
	$A \downarrow \uparrow A^\dagger$		$A^{\dagger T} \downarrow \uparrow A^T = A^{\dagger T \dagger}$	
$q$	$\mathbb{U}_R = A(\mathbb{U})$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_q$	$\mathbb{F}_R = A^{\dagger T}(\mathbb{S}_R)$	$Q$
	$D_R = D \circ A^\dagger \downarrow$		$\uparrow D_R^T$	
$\zeta$	$\mathbb{E}_R = D_R(\mathbb{U}_R) = B(\mathbb{E}_p)$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_\zeta$	$\mathbb{S}_R = B^T(\mathbb{S})$	$Z$
	$B^\dagger \downarrow \uparrow B$		$B^T \downarrow \uparrow B^{\dagger T}$	
$\vec{\epsilon}$	$\mathbb{E}_p = D(\mathbb{U}_p) = B^\dagger(\mathbb{E}_R) \subset \mathbb{E}$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$	$\mathbb{S}$	$\vec{\sigma}$

FIGURE 3.2 – Passage 3D-2D

### 3.5 Contraintes tridimensionnelles et contraintes généralisées

Calculons enfin la puissance virtuelle développée par les contraintes dans un champ de déformations engendré par un champ de vitesses virtuelles principal  $\delta \vec{V}$  ; on trouve en utilisant les formules (1.31) et (3.24) :

$$\langle grad_s \delta \vec{V}, \vec{\sigma} \rangle_\Psi = - \int_\Omega \left( \delta \vec{\epsilon}^m : \vec{N} + \delta \vec{\chi} : \vec{M} + \delta \vec{\gamma} \cdot \vec{T} \right) \quad (3.25)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \vec{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}^{(2)} \\ \vec{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{\sigma}^{(2)} \\ \vec{T} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{13} \vec{e}_1 + \sigma_{23} \vec{e}_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Les contraintes généralisées  $Z = (\vec{N}, \vec{M}, \vec{T})$  apparaissent donc comme des moments d'ordre 0 et 1 des contraintes tridimensionnelles. L'application définie par les formules (3.26) apparaît comme la transposée de  $B^\dagger$  :

$$\vec{\sigma} \in \mathbb{S} \longmapsto B^{\dagger T} \vec{\sigma} = (\vec{N}, \vec{M}, \vec{T}) \quad (3.27)$$

# Chapitre 4

## Cadres fonctionnels en élasticité linéaire

### Introduction

On considère un plaque constituée d'un matériau élastique dont la loi de comportement est de la forme :

$$\left. \begin{aligned} (x, \vec{\epsilon}) \in \mathbb{T}_3 \mapsto \vec{\sigma} \in \mathbb{T}_3 \quad : \quad \sigma_{ij} = K_{ijkl}(x)\epsilon_{kl} \\ \text{avec} : \\ K_{ijkl} = K_{jikl} = K_{ijlk} = K_{klij} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

et qui possède la propriété :

$$\exists c_1 > 0 \quad \exists c_2 > c_1 \quad \forall \epsilon \in \Omega \quad \forall \vec{\epsilon} \in \mathbb{T}_3 : c_1 \vec{\epsilon}_{ij} \vec{\epsilon}_{ji} \leq \vec{\epsilon}_{ij} K_{ijkl} \vec{\epsilon}_{kl} \leq c_2 \vec{\epsilon}_{ij} \vec{\epsilon}_{ji} \quad (4.2)$$

Sous ces hypothèses banales on sait construire un bon cadre fonctionnel pour l'étude du solide tridimensionnel :

$$\mathbb{U} = (H^1(\Psi))^3 \quad ; \quad \mathbb{E} = (L^2(\Psi))^6 \quad ; \quad \mathbb{F} = \mathbb{U}' \quad ; \quad \mathbb{S} = \mathbb{E}' \quad (4.3)$$

L'étude préalable des relations entre traces et moments conduit, pour les deux modèles bidimensionnels de plaque, à des choix fonctionnels cohérents avec celui qu'on utilise pour le tridimensionnel.

### 4.1 Traces et moments

*Notation.* Soit  $f : (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}$  ; pour  $(x_1, x_2)$  donné on note  $f(x_1, x_2, \cdot)$  la fonction  $z \in \mathbb{R} \mapsto f(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}$ .

L'application  $\mathcal{M}_k$ , pour  $s \geq 1$  et  $p \geq 1$ , permet de relier d'une part les espaces de Sobolev  $W^{s,p}(\Psi)$  et  $W^{s,p}(\Omega)$  et d'autre part les espaces de traces  $W^{s-1/p,p}(\partial\Psi)$  et  $W^{s-1/p,p}(\partial\Omega)$ .

On note évidemment :

$$\mathcal{M}_k(W^{s,p}(\Psi)) = \{g : \Omega \mapsto \mathbb{R} / \exists f \in W^{s,p}(\Psi) : g(x_1, x_2) = \mathcal{M}_k(f)\} \quad (4.4)$$

Le théorème de Fubini assure que, pour  $f \in \mathcal{M}_k(W^{s,p}(\Psi))$ , les fonctions  $\mathcal{M}_k(f)$  et  $\mathcal{M}_k(f|_{\partial\Psi})$  sont définies presque partout respectivement sur  $\Omega$  et sur  $\partial\Omega$ . On va maintenant démontrer la

## Notations 2

On note :  $C^\infty(\bar{\Psi})$  l'espace des restrictions à  $\bar{\Psi}$  des fonctions indéfiniment différentiables sur  $E_3$ .

## Proposition 11

Pour  $s$  entier et pour  $s \geq 1$  et  $p \geq 1$  le moment est une application linéaire continue pour les topologies de la norme sur les espaces concernés On a de plus l'égalité :

$$\mathcal{M}_k(f|_{\partial\Psi}) = \mathcal{M}_k(f)|_{\partial\Psi} \quad (4.5)$$

c'est-à-dire que le moment de la trace est la trace du moment.

Tout d'abord, en effet, la continuité de  $f \in \mathcal{M}_k : C^\infty(\bar{\Psi}) \mapsto C^\infty(\bar{\Omega})$  est triviale.

Ensuite si  $f \in W^{s,p}(\Psi)$  et  $g = \mathcal{M}_k(f)$  on peut appliquer à  $g$  et à toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $s$  la majoration du type :

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \left| \int_{\mathcal{I}} z^k f(x_1, x_2, z) dz \right|^p dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{\mathcal{I}} |z|^{kp} |f(x_1, x_2, z)|^p dz \right) dx_1 dx_2 \leq \left( \frac{h}{2} \right)^{kp} \|f\|_{L^p(\Psi)}^p \end{aligned}$$

ce qui conduit, par addition membre à membre de ces inégalités, à :

$$\|g\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq \left( \frac{h}{2} \right)^{kp} \|f\|_{W^{s,p}(\Psi)}^p \quad (4.6)$$

$\mathcal{M}_k$  est donc une application linéaire continue de  $W^{s,p}(\Psi)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ . Ainsi donc  $\mathcal{M}_k(W^{s,p}(\Psi)) \subset W^{s,p}(\Omega)$ . Inversement d'après (3.5)  $\mathcal{M}_k \mathcal{R}_k$  est l'application identique sur  $W^{s,p}(\Omega)$  ; alors :

$$W^{s,p}(\Omega) = \mathcal{M}_k(\mathcal{R}_k(W^{s,p}(\Omega))) \subset \mathcal{M}_k(W^{s,p}(\Psi)) \quad (4.7)$$

inclusion inverse de la précédente qui établit la surjectivité de  $\mathcal{M}_k$ .

Pour établir (4.5) rappelons tout d'abord la majoration classique de la norme de la trace par celle de la fonction :

$$\exists C \quad \forall f \in W^{s,p}(\Psi) : \|f|_{\partial\Psi}\|_{W^{s-1/p,p}(\partial\Psi)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Psi)} \quad (4.8)$$

L'espace  $\phi_i \in C^\infty(\overline{\Psi})$  est dense dans  $W^{s,p}(\Psi)$ ; donc toute fonction  $f \in W^{s,p}(\Psi)$  y est la limite d'une suite de fonctions  $\phi_i \in C^\infty(\overline{\Psi})$  et d'après (4.8) :

$$\phi_i \rightarrow f \implies (\phi_i)|_{\partial\Psi} \rightarrow f|_{\partial\Psi} \quad (4.9)$$

Comme on a l'égalité triviale pour les fonctions régulières :

$$\phi_i \in C^\infty(\overline{\Psi}) \implies \mathcal{M}_k(\phi_i)|_{\partial_3\Psi} = (\mathcal{M}_k(\phi_i))|_{\partial\Omega} \quad (4.10)$$

la continuité de  $\mathcal{M}_k$  permet de passer à la limite, ce qui établit (4.5).

## 4.2 Modèle de Reissner-Mindlin

La proposition 11 4.1 nous conduit aux choix fonctionnels suivants :

*Déplacements généralisés*

$$(\vec{v}, w, \vec{\beta}) \in \mathbb{U}_R = H^1(\Omega)^2 \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)^2 \quad (4.11)$$

*Déformation et contraintes généralisées*

$$\begin{aligned} (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}, \vec{\gamma}) &\in \mathbb{E}_R = L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^2 \\ (\vec{N}, \vec{M}, \vec{T}) &\in \mathbb{S}_R = L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Quant à l'espace des efforts extérieurs c'est le dual topologique de  $\mathbb{U}_R$ ; mécaniquement il comprend des efforts sur l'intérieur et des efforts sur la frontière de  $\Omega$ ; il est difficile de l'expliciter mathématiquement. On peut affirmer toutefois que lui appartiennent les charges  $\mathcal{Q} = (\vec{g}, p, \vec{c}, \vec{G}, P, \vec{C})$  dont les six composantes sont de carré sommable sur  $\Omega$  pour les trois premières, sur  $\partial\Omega$  pour les trois dernières. Cette remarque concerne la quasi-totalité des cas pratiques où les efforts extérieurs sont des charges données. Par contre les efforts de liaisons peuvent évidemment être n'importe quel élément de  $\mathbb{E}'$ .

### Remarque

*Les fonctions  $w \in (H^1(\Omega))^2$  ne sont pas nécessairement continues; le modèle de Reissner n'admet donc pas d'efforts extérieurs représentés par des mesures sur  $\Omega$ , comme par exemple les forces concentrées. Nous en donnerons un contre-exemple en fin de chapitre*

### 4.3 Modèle de Kirchhoff

Le choix fonctionnel dérive du précédent pour  $grad^{(2)}w = -\beta \in H^1(\Omega)^2$  :

*Déplacements généralisés*

$$(\vec{v}, w) \in \mathbb{U}_R = H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega) \quad (4.13)$$

*Déformation et contraintes généralisées*

$$\begin{aligned} (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}) &\in \mathbb{E}_R = L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^4 \\ (\vec{N}, \vec{M}) &\in \mathbb{S}_R = L^2(\Omega)^4 \times L^2(\Omega)^4 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cette fois-ci les forces concentrées sont admises par le modèle.

### 4.4 Effet d'une force concentrée

Jean-Louis Batoz et Gouri Dhatt donnent la solution pour une plaque circulaire encastrée soumise à une force  $P$  concentrée en son centre (cf. [4] tome 2, page 277).

La plaque, de rayon  $R$ , est constituée d'un matériau homogène et isotrope. On note

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad ; \quad D_c = k \frac{E h}{2(1 + \nu)} \quad (4.15)$$

les rigidités à la flexion  $D$  et au cisaillement  $D_c$  ;  $E$  et  $\nu$  sont les modules de Young et de Poisson. Le facteur  $k$  est le "facteur de correction de l'effort tranchant" que les théories classiques évaluent à environ  $\frac{5}{6}$ .

La loi de comportement s'écrit alors pour la plaque de Reissner :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \beta_{1,1} + \nu \beta_{2,2} & (1 - \nu)(\beta_{1,2} + \beta_{2,1})/2 \\ (1 - \nu)(\beta_{1,2} + \beta_{2,1})/2 & \beta_{2,2} + \nu \beta_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = D_c \vec{\gamma}$$

Alors on a la solution pour la flèche :

$$w = \frac{P R^2}{16 \pi D} \left( 1 - \xi^2 + 2\xi^2 \text{Log} \xi - \frac{8D}{R^2 D_c} \text{Log} \xi \right)$$

où  $r$  est le rayon polaire et  $\xi = \frac{r}{R}$ .

Dans le modèle K on a  $D_c = \infty$  et la flèche au centre se réduit à  $w = \frac{P R^2}{16 \pi D}$  tandis qu'elle y est infinie dans le modèle R.

# Chapitre 5

## Lois de comportement de plaque

### Introduction

Avant la conception de plaques épaisses composites l'estimation de l'effort tranchant ne présentait pas beaucoup d'intérêt pratique. Au demeurant les anciens ouvrages de Résistance des Matériaux n'en faisaient aucun cas (cf. par exemple J.Courbon ([30], Warren C. Young [31]) et ne traitaient que des plaques minces pour lesquels le modèle de Kirchhoff était satisfaisant dans la pratique.

L'arrivée des plaques multicouches a rendu indispensable l'estimation des contraintes de "cisaillement transverse", à savoir  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$ , qui jouent un rôle important dans la prévision du délaminage (cf., par exemple, [32]). E. Reissner fut l'un des pionniers ([15]) de cette prévision en proposant une méthode originale : la stationnarisation d'une fonctionnelle mixte qui porte son nom. Nous la présenterons dans le paragraphe 6.4.3.

Enfin notre méthode du "déplacement" donne un résultat exact pour les conditions de Saint-Venant c'est-à-dire dans les parties non chargées de la plaque et suffisamment loin du bord. Nous comparerons les résultats obtenus par les trois méthodes

### 5.1 Notations matricielles

Dans une phase d'utilisation pratique des concepts théoriques et dans la mise en œuvre d'un code d'éléments finis il est commode de représenter les variables vectorielles et tensorielles par des "vecteurs-lignes"  $\langle \cdot \rangle$ , ou par des "vecteurs-colonnes"  $\{ \cdot \}$ . Les raideurs sont alors représentées par des matrices carrées  $[ \cdot ]$ . Ainsi, en adoptant les conventions adoptées par Batoz et Dhett on écrit déformations et contraintes sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \langle \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23} \rangle \\ \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \rangle \end{aligned}$$

On note que les termes non diagonaux des tenseurs symétriques à valeurs déformation sont multipliés par 2 dans leur représentation en ligne ou en colonne tandis qu'ils restent inchangés pour les tenseurs à valeurs contrainte. On a alors trois écritures équivalentes :

$$\vec{\epsilon} : \vec{\sigma} = \epsilon_{ij} \sigma_{ji} = \langle \epsilon \rangle \cdot \langle \sigma \rangle$$

On aura de même pour les déformations et contraintes généralisées :

$$\begin{aligned} \{\epsilon^m\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^m \\ \epsilon_{22}^m \\ 2\epsilon_{12}^m \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\epsilon_{12}^m \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \\ \{N\} &= \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de raideur  $K$  telle que  $\{\sigma\} = [K]\{\epsilon\}$  est symétrique. Elle vaut pour le matériau tridimensionnel isotrope :

$$[K] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

## 5.2 Contraintes et cisaillement transverse

### Hypothèse 3

La contrainte  $\sigma_{33}$  est nulle et la loi de comportement est de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [K^{(2)}] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = [K^c] \begin{Bmatrix} 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

*c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sont indépendantes des déformations  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{12}$ . Les raideurs  $K^{(2)}$  et  $K^c$  sont des fonctions de  $(x_1, x_2, z)$ .*



Cette hypothèse<sup>1</sup> est souvent vérifiée par les matériaux utilisés ; par exemple lorsqu'ils présentent une orthotropie pour une base orthonormée  $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3)$  ; dans les plaques multicouches  $(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$  varie d'une couche à l'autre en tournant autour de  $\vec{e}_3$ . On se reportera à ([4], pp.93-101)<sup>2</sup>.

Pour un matériau isotrope cette hypothèse conduit à

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33} = 0 &\iff \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \\ [K^{(2)}] &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ [K^c] &= \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

### 5.3 Relations brutes entre déformations et contraintes généralisées

On néglige déplacement et déformations complémentaires pour établir des relations "brutes" entre contraintes généralisées et déformations principales. En utilisant (3.22) et (3.23) on obtient les formules suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H^m] & [H^{mf}] & [0] \\ [H^{mf}] & [H^m] & [0] \\ [0] & [0] & [H^{cb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^m\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} [H^m] &= \int_{-h/2}^{h/2} [K^{(2)}] dz \\ [H^{mf}] &= \int_{-h/2}^{h/2} z [K^{(2)}] dz \\ [H^f] &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [K^{(2)}] dz \\ [H^{cb}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [K^c] dz \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

La raideur  $[H^{mf}]$  de couplage entre les effets de membrane et ceux de flexion s'annule lorsque  $[K^{(2)}]$  est une fonction paire de  $z$ . La matrice  $[H^{cb}]$  est la raideur "brute" au cisaillement.

---

1. souvent nommée "des contraintes planes, contrairement à l'usage traditionnel qui, à juste titre, réservait cette appellation au cas où  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ .

2. Pour faciliter la comparaison avec le livre de Batoz et Dhett signalons qu'ils notent respectivement  $[H]$  et  $[H_c]$  les matrices que nous avons notées  $[K^{(2)}]$  et  $[K^c]$ .

On notera  $L$  la raideur de membrane-flexion et  $R$  son inverse :

$$[L] = \begin{bmatrix} [H^m] & [H^{mf}] \\ [H^{mf}] & [H^f] \end{bmatrix}; [R] = [L]^{-1}; \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon^m \\ \chi \end{bmatrix} \right\} = [R] \left\{ \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \right\} \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope on a :

$$\begin{aligned} [H^m] &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [H^{mf}] = [0]; [H^{cb}] = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [H^f] &= D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ avec : } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Les formules précédentes, qui négligent les déformations dues au déplacement complémentaire, donnent satisfaction pour les contraintes généralisées  $\{N\}$  et  $\{M\}$ ; elles sont presque inacceptables pour l'effort tranchant  $\{T\}$  qu'elles surestiment. Mais surtout la relation

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \right\} = [K^c] \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right\}$$

est incompatible avec les équations d'équilibre qui annulent  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sur les faces  $z = \pm h/2$ .

### Inexistence d'une loi de comportement locale pour les plaques de Reissner

Au sens usuel du terme une loi locale de comportement locale serait une correspondance, en chaque point  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ , entre les déformations généralisées  $[\epsilon^m](x)$ ,  $[\chi](x)$ ,  $\{\gamma\}(x)$  et les contraintes généralisées  $[N](x)$ ,  $[M](x)$ ,  $\{T\}(x)$  correspondance indépendante des équations d'équilibre et, en particulier de l'équation  $\text{div}^{(2)}M - T = c$ .

Effectivement il n'existe pas d'état homogène de déformations généralisées qui engendrerait un état homogène de contraintes généralisées, sauf à introduire la densité de couple  $c$  adéquate.

En revanche le modèle de Kirchhoff admet une loi de comportement locale qui se réduit à

$$\left\{ \begin{bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} [H^m] & [H^{mf}] \\ [H^{mf}] & [H^m] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \{\epsilon^m\} \\ \{\chi\} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.8)$$

# Chapitre 6

## Estimations classiques de l'effort tranchant

Dans cette étude on suppose découplées la partie plane des contraintes et la partie cisaillement transverse. C'est ce que précise l'hypothèse 4 :

### Hypothèse 4

1. On se place dans un domaine  $\Omega_1 \times ]-h/2, h/2[$  où ne s'exerce aucun effort extérieur (conditions dites de Saint-Venant).
2. La partie plane des contraintes, soit  $\vec{\sigma}^{(2)}$  se réduit à celle associée aux déformations principales par la relation (5.2).
3. La raideur du solide tridimensionnel est stationnaire en  $(x_1, x_2)$ .
4. L'effort de membrane  $N$  et l'effort tranchant  $T$  sont stationnaires au point  $(x_1, x_2)$  considéré.

### 6.1 Contraintes de cisaillement

La méthode classique consiste à construire le couple  $\langle \tau \rangle = \langle \sigma_{13}, \sigma_{23} \rangle$  tel que soient vérifiées les équations d'équilibre du milieu tridimensionnel :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \text{ pour } -h/2 < z < h/2 \\ \langle \tau(-h/2) \rangle &= \langle \tau(h/2) \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Notons tout d'abord que les équations précédentes entraînent, par intégration en  $z$ , puis par multiplication par  $z$  et intégration en  $z$  :

$$\left. \begin{aligned} \text{div}^{(2)} N &= 0 \\ \text{div}^{(2)} M - T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

ce qui résulte aussi des équations (3.26).

L'équation (6.1) permet d'exprimer  $\{\tau\}$  en fonction de  $z$  et de la divergence de  $[\sigma^{(2)}]$  et formuler l'énoncé :

**Proposition 12**

*Sous les hypothèses 3 et 4 (5.2, 6) la distribution du cisaillement transverse est donnée par la formule :*

$$\{\tau(z)\} = - \int_{-h/2}^z \text{div}^{(2)}\{\sigma^{(2)}\} dz \quad (6.3)$$

et l'on a effectivement :  $\int_{-h/2}^{h/2} \{\tau(z)\} dz = \{T\}$

En effet nous pouvons utiliser les relations (3.24, 5.2, 5.6, 6.2) pour expliciter la partie plane des contraintes :

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma^{(2)}\} &= [K^{(2)}(z)]\{A_1\} + z[K^{(2)}(z)]\{A_2\} \\ \text{avec :} \\ \{A_1\} &= [R_{11}]\{N\} + [R_{12}]\{M\} \\ \{A_2\} &= [R_{12}]\{N\} + [R_{22}]\{M\} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Par construction  $\{\tau(-h/2)\}$  est nul ; quant à  $\{\tau(h/2)\}$  il vaut :

$$\{\tau(h/2)\} = -\text{div}^{(2)} \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma^{(2)}\} dz = -\text{div}^{(2)}\{N\} = 0 \quad (6.5)$$

en sorte que les conditions d'équilibre sont respectées en  $\pm h/2$ .

Vérifions maintenant que l'intégrale de  $\tau$  est bien égale à l'effort tranchant.

On a tout d'abord, d'après (6.4) :

$$\text{div}^{(2)}(\{A_1\}) = [R_{12}]\{T\} \quad ; \quad \text{div}^{(2)}(\{A_2\}) = [R_{22}]\{T\} \quad (6.6)$$

donc :

$$\text{div}^{(2)}\{\sigma^{(2)}\} = [K^{(2)}(z)][R_{12}]\{T\} + z[K^{(2)}(z)][R_{22}]\{T\} \quad (6.7)$$

Maintenant on écrit les lignes suivantes en permutant l'ordre des intégrations

puis en utilisant l'égalité  $[L] = [R]^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} \{\tau(z)\} dz &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_{-h/2}^{z'} \operatorname{div}^{(2)} \sigma^{(2)} dz \right) dz' \\
&- \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_{-h/2}^{z'} ([K^{(2)}(z)][R_{12}]\{T\} + z[K^{(2)}(z)][R_{22}]\{T\}) dz \right) dz' = \\
&- \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_z^{h/2} ([K^{(2)}(z)][R_{12}]\{T\} + z[K^{(2)}(z)][R_{22}]\{T\}) dz \right) dz = \\
&- \left( \int_{-h/2}^{h/2} [K^{(2)}(z)] \left( \frac{h}{2} - z \right) dz \right) [R_{12}]\{T\} - \left( \int_{-h/2}^{h/2} z[K^{(2)}(z)] \left( \frac{h}{2} - z \right) dz \right) [R_{22}]\{T\} = \\
&\left( -\frac{h}{2}[H^m][R_{12}] + [H^{mf}][R_{12}] - \frac{h}{2}[H^{mf}][R_{22}] + [H^f][R_{22}] \right) \{T\} = \{T\}
\end{aligned}$$

## 6.2 Cas d'une plaque homogène

Lorsque les raideurs de membrane  $[K^{(2)}]$  et de cisaillement  $[K^c]$  sont indépendantes de  $z$  les formules précédentes se simplifient considérablement ; on aboutit facilement au résultat cherché. On a tout d'abord :

$$[H^m] = h[K^2] \quad ; \quad [H^{mf}] = 0 \quad ; \quad [H^f] = \frac{h}{12}[K^2]$$

qui, en tenant compte de (6.2), conduit à

$$\operatorname{div}^{(2)}[\sigma^{(2)}] = \frac{12}{h^3} z \operatorname{div}^{(2)}\{T\} \quad ; \quad \{\tau\} = \frac{12}{h^3} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \{T\}$$

La densité surfacique d'énergie élastique de cisaillement vaut alors :

$$\begin{aligned}
W_c &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \langle \tau \rangle [K^c]^{-1} \{\tau\} dz \\
&= \frac{1}{2} \frac{144}{h^6} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) dz \right) \langle T \rangle [K^c]^{-1} \{T\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{6}{5h} \langle T \rangle [K^c]^{-1} \{T\}
\end{aligned}$$

en sorte que la raideur cherchée est :

$$[H^c] = \frac{5h}{6}[K^c] = \frac{5h}{6}[K^{cb}] \quad (6.8)$$

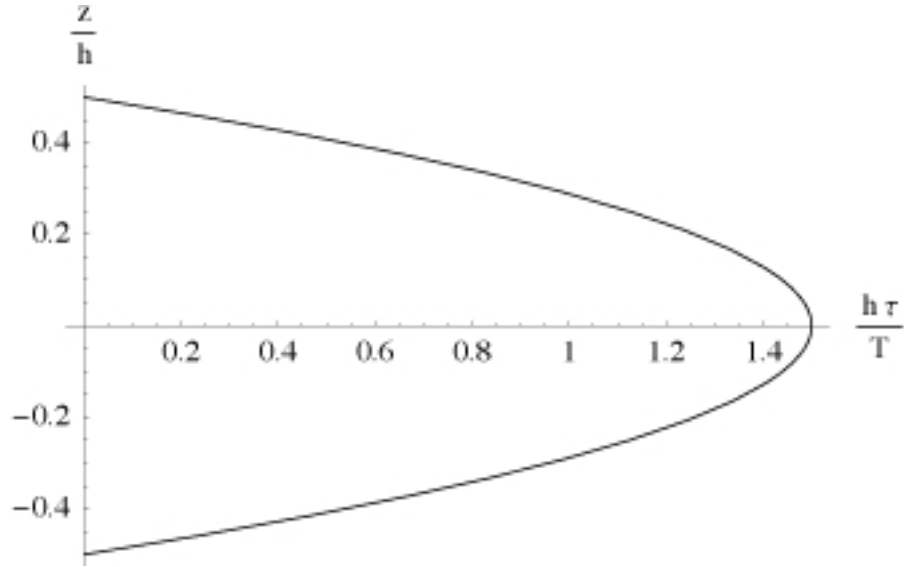


FIGURE 6.1 – Contrainte  $\sigma_{13}$  pour  $T_1 = 1$

## 6.3 Cas général et exemple de plaque stratifiée

La formule (6.3) permet de traiter par intégration tout les cas de plaques inhomogènes et en particulier celui d'une plaque stratifiée. C'est la voie suivie par J.L.Batoz et G.Dhatt ([4]), t. 2, p.243) et que nous suivrons aussi avec, toutefois, une option un peu différente. Ceci suppose, répétons le, que les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées.

### 6.3.1 Présentation d'un exemple de référence

Nous prendrons l'exemple d'une plaque stratifiée de trois couches orthotropes d'un même matériau composé de fibres de verre enrobées dans une résine acrylique. La couche médiane, qui occupe la moitié de l'épaisseur, est orientée à  $90^\circ$  par rapport aux deux autres, comme le montre la figure 6.2

Les matrices de raideur sont les suivantes (cf. [4], tome 2, page 247) pour des fibres orientées selon  $x_1$  (en MPa) :

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} 25. & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} ; \quad [K^c] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

avec, bien sûr, un échange des composantes 1 et 2 pour le cas des fibres orientées selon  $x_2$ .

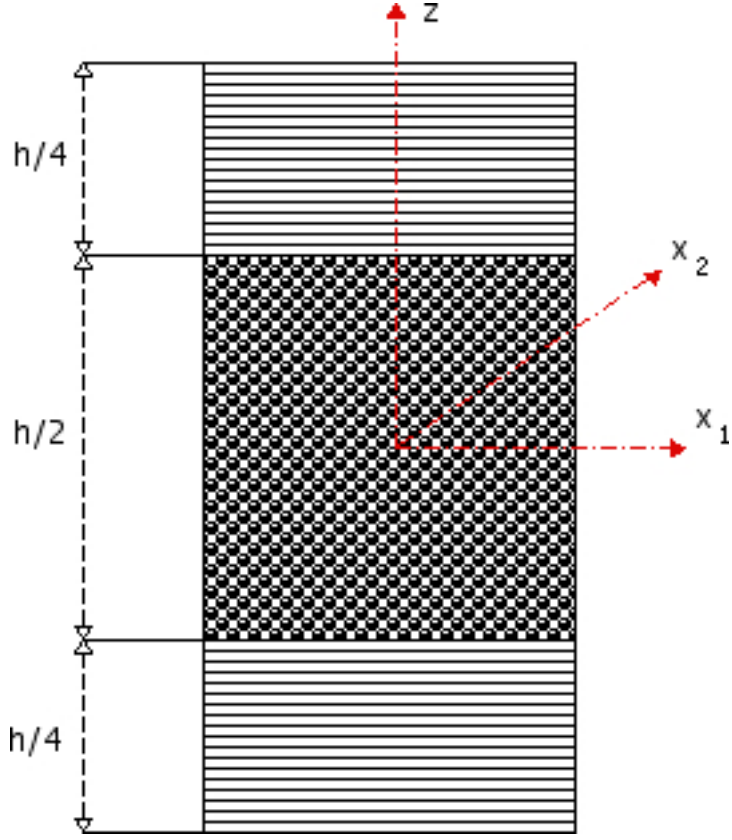


FIGURE 6.2 – Plaque stratifiée de trois couches

## 6.4 Deux approches voisines

### 6.4.1 Nécessité de privilégier certaines variables

Pour utiliser la formule (6.3) on doit calculer  $div^{(2)}\sigma$  ; à partir de la formule (5.2) on obtient :

$$\text{si } |z| \geq 0.25 \quad div^{(2)}\sigma = z \left\{ \begin{array}{l} 13.64 M_{11,1} + 12 M_{12,2} - 0.102 M_{22,1} \\ 0.102 M_{11,2} + 12 M_{12,1} + 2.99 M_{22,2} \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

$$\text{si } |z| < 0.25 \quad div^{(2)}\sigma = z \left\{ \begin{array}{l} 0.537 M_{11,1} + 12 M_{12,2} + 0.716 M_{22,1} \\ -0.716 M_{11,2} + 12 M_{12,1} + 75.04 M_{22,2} \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

puis, en intégrant par rapport à  $z$  :

$$\tau_1 = (-6.82 M_{11,1} - 6. M_{12,2} + 0.05 M_{22,1})z^2 \quad (6.12a)$$

$$+ 1.70M_{11,1} + 1.5M_{12,2} - 0.01M_{22,1} \quad (6.12b)$$

$$\tau_2 = (-0.05 M_{11,2} - 6. M_{12,1} - 1.50 M_{22,2})z^2 \quad (6.12c)$$

$$+ 0.01M_{11,2} + 1.5M_{12,1} + 0.37M_{22,2} \quad (6.12d)$$

$$\tau_1 = (0.27 M_{11,1} - 6M_{12,2} + 0.36 M_{22,1})z^2 \quad (6.12e)$$

$$+ 1.30M_{11,1} + 1.5M_{12,2} + 0.01M_{22,1} \quad (6.12f)$$

$$\tau_2 = (0.37 M_{11,2} - 6M_{12,1} - 37.5M_{22,2})z^2 \quad (6.12g)$$

$$+ 0.01M_{12,2} + 1.5M_{12,1} + 0.37M_{22,2} \quad (6.12h)$$

Il est de tradition de donner des estimations de la raideur et des contraintes de cisaillement en fonction de l'effort tranchant. Cependant lors d'un calcul pratique mené par éléments finis on dispose en général des six dérivées des composantes de  $M$  qui interviennent dans les formules précédentes, ce qui suffit au dimensionnement. La suite de ce paragraphe est donc passablement anecdotique, même si elle montre que la distribution des contraintes de cisaillement ne dépend pas du seul effort tranchant comme ces estimations pourraient porter à le croire.

Pour introduire l'effort tranchant dans ces formules il faut bien opérer un changement de variables qui fait disparaître deux de ces dérivées au profit de  $T_1$  et de  $T_2$ . Dans leur ouvrage déjà cité ([4]) les auteurs choisissent le changement de variables :

$$\begin{aligned} M_{11,1} &= (T_1 + \lambda_1)/2 & M_{22,2} &= (T_2 + \lambda_2)/2 \\ M_{12,2} &= (T_1 - \lambda_1)/2 & M_{12,1} &= (T_2 - \lambda_2)/2 \\ M_{11,2} &= \lambda_3 & M_{22,1} &= \lambda_4 \end{aligned} \quad (6.13)$$

qui présente une élégante symétrie.

On peut aussi choisir, comme nous l'avons fait, de n'éliminer que  $M_{11,1}$  et  $M_{22,2}$  :

$$M_{11,1} = T_1 - M_{12,2}; \quad M_{22,2} = T_2 - M_{12,1} \quad (6.14)$$

et ces choix mènent à deux résultats très différents.



### 6.4.2 L'approche de Batoz et Dhatt (notée "BD")

Le changement de variables (6.13) conduit à l'expression suivante de la divergence :

$$\text{si } |z| > 0.25 \quad \text{div}^{(2)}\sigma = z \left\{ \begin{array}{l} +12.82 T_1 + 0.819\lambda_1 - 0.1023 \lambda_4 \\ 7.497 T_2 - 4.503 \lambda_2 + 0.1023 \lambda_3 \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

$$\text{si } |z| < 0.25 \quad \text{div}^{(2)}\sigma = z \left\{ \begin{array}{l} 6.269T_1 + 5.731 \lambda_1 + 0.716 \lambda_4 \\ 43.52 T_2 + 31.52 \lambda_2 + 0.716 \lambda_3 \end{array} \right\} \quad (6.16)$$

Dans les deux cas ( $|z| > 0.25$  ou  $|z| < 0.25$ ) la divergence ne dépend que de  $(T_1, T_2)$  si et seulement si <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} 0.819\lambda_1 - 0.1023 \lambda_4 &= 0 \\ -4.503 \lambda_2 + 0.1023 \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

soit, en faisant le changement de variables inverse :

$$\begin{aligned} M_{22,1} &= 8 (M_{11,1} - M_{12,2}) \\ M_{11,2} &= 44 (M_{22,2} - M_{12,1}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Lorsque les conditions (6.17) sont vérifiées l'approche de Batoz et Dhatt donne un résultat exact vis-à-vis de l'hypothèse 4 (cf. 6) et de son alinéa 2. Il en résulte la distribution des contraintes de cisaillement transverse ( $\tau_1 = \sigma_{13}$ ,  $\tau_2 = \sigma_{23}$ ) représentée en traits pointillés par la figure 6.3.

Si ces conditions ne sont pas satisfaites cette approche donne une médiocre estimation des contraintes de cisaillement transverse, comme on le verra sous peu.

On calcule la densité superficielle d'énergie élastique de cisaillement :

$$\frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \langle \tau \rangle [K^c]^{-1} \{\tau\} dz = \frac{1}{2} (5.01 T_1^2 + 3.24 T_2^2) \quad (6.18)$$

d'où l'on déduit la matrice de raideur au cisaillement :

$$[H^c] = h \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.31 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 0.57 & 0 \\ 0 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Rappelons que

$$[H^{cb}] = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

est la matrice de raideur au cisaillement brut (cf.5.5). Les "coefficients de correction" sont donc 0.57 et 0.88.

---

1. la condition est évidemment suffisante ; le calcul de l'énergie de cisaillement montre qu'elle est également nécessaire pour que cette énergie se réduise à une forme quadratique en  $(T_1, T_2)$

### 6.4.3 Une variante notée "BN" de l'approche Batoz-Dhatt

On suit la même voie que précédemment avec, cette fois, le changement de variables (6.14). On obtient pour la divergence :

$$\text{si } |z| \geq 0.25 \quad \text{div}^{(2)}\sigma = z \begin{bmatrix} -1.268 M_{12,2} - 0.102 M_{22,1} + 13.64 T_1 \\ 0.102 M_{11,2} + 9.006 M_{12,1} + 2.99 T_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$\text{si } |z| < 0.25 \quad \text{div}^{(2)}\sigma = z \begin{bmatrix} 11.46 M_{12,2} + 0.716 M_{22,1} + 0.537 T_1 \\ -0.716 M_{11,2} - 63.04 M_{12,1} + 75.04 T_2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

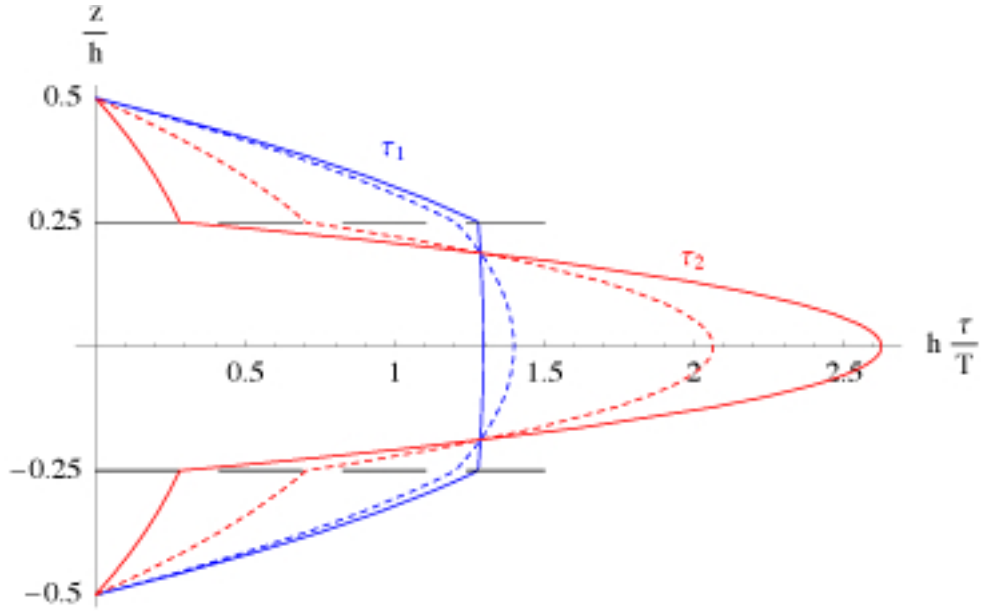


FIGURE 6.3 – Contraintes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  pour  $T_1 = 1$  et  $T_2 = 1$ . En pointillé BD, en trait plein BN.

Cette fois encore la divergence ne dépend que de  $(T_1, T_2)$  si et seulement si <sup>2</sup> sont vérifiées les deux relations :

$$\begin{aligned} M_{22,1} &= -16 M_{12,2} \\ M_{11,2} &= -88 M_{12,1} \end{aligned} \quad (6.22)$$

qui, différentes des relations (6.17), leur sont analogues. Les profils de contrainte associés sont représentés en trait plein sur la figure 6.3. Les coefficients correcteurs sont alors 0.60 et 0.72.

2. même remarque que celle faite dans la note de pied de page n°1

On constate que les profils de contrainte sont très différents de ceux fournis par l'hypothèse BD. En pratique il est inutile de calculer une matrice de raideur au cisaillement : les calculs par éléments finis fournissent en tout point les composantes du tenseur de flexion-torsion et de son gradient. Il est donc plus habile d'utiliser les formules (6.12) pour connaître la distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque et, en particulier, aux interfaces.

Sans les moyens numériques d'aujourd'hui cette option était évidemment hors de portée à l'époque où Reissner a développé sa méthode. Même si cette dernière est maintenant caduque pour nos applications pratiques elle reste intéressante sur les plans théorique et historique. À notre connaissance c'est en effet la première méthode de "point-selle"<sup>3</sup> utilisée en mécanique des structures et l'utilisation des fonctions selles est encore un des paradigmes de l'optimisation. Aussi nous a-t-il semblé nécessaire d'honorer Reissner en exposant sa démarche dans le paragraphe qui suit.

## 6.5 L'estimation de Reissner

### 6.5.1 La fonctionnelle de Reissner

Revenons au cas du solide élastique tridimensionnel  $\Psi$  de raideur  $K$ . La densité volumique d'énergie élastique exprimée en termes des contraintes est :

$$W_\sigma(\vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot K^{-1} \cdot \vec{\sigma}$$

ce qui permet d'écrire la loi de comportement sous les deux formes équivalentes :

$$\vec{\sigma} = K \cdot \vec{\epsilon} \iff \vec{\epsilon} = (grad_\sigma W_\sigma)(\vec{\sigma})$$

On nomme "énergie complémentaire" l'intégrale

$$\mathcal{E}_c(\vec{\sigma}) = - \int_\Psi \left( W_\sigma(\vec{\sigma}) + \vec{\epsilon}^o \cdot \vec{\sigma} \right) = \langle \vec{\epsilon}^o, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon - \int_\Psi W_\sigma(\vec{\sigma}) \quad (6.23)$$

où  $\vec{\epsilon}^o$  est un champ de déformations imposées, d'origine thermique par exemple, ou encore le champ de déformations dû à un champ de déplacements imposés.

---

3. un point-selle  $(x_0, y_0)$  est le col d'une fonction  $f$  de  $(x, y)$ , convexe en  $x$ , concave en  $y$  : pour  $y$  fixé à la valeur  $y_0$   $f(x, y_0)$  est minimum en  $x_0$  et pour  $x$  fixé à la valeur  $x_0$   $f(x_0, y)$  est maximum en  $y_0$ .

On connaît bien le théorème de l'énergie complémentaire : *Parmi tous les champs de contraintes en équilibre avec les efforts extérieurs la solution du problème d'élasticité maximise l'énergie complémentaire.*

La mise en œuvre de ce théorème est rarement commode parce qu'il est difficile de construire un espace suffisamment riche de champs de contraintes en équilibre pour que la maximisation apporte un résultat acceptable. Pour y remédier Reissner [16] ajoute à  $\mathcal{E}_c$  un terme bilinéaire qui prend en compte les équations d'équilibre :

$$\mathcal{R}(\vec{U}, \vec{\sigma}) = \mathcal{E}_c(\vec{\sigma}) + \langle \vec{U}, D^T \vec{\sigma} + \Phi \rangle_u \quad (6.24)$$

où l'on se rappelle que  $\langle \vec{U}, \Phi \rangle_u$  est le travail de la charge  $\Phi$  dans le déplacement  $u$ , tandis que  $D^T \sigma + \Phi = 0$  est l'équation d'équilibre dans l'intérieur de  $\Psi$ .

Notons que  $\mathcal{R}$  est concave par rapport à  $\vec{\sigma}$  et linéaire (donc convexe) par rapport à  $\vec{U}$ .

### ***Équivalence partielle des problèmes du déplacements complémentaires pour Kirchhoff et pour Reissner***

On a alors le résultat classique suivant :

### **Théorème 3**

#### **Stationnarité de la fonctionnelle de Reissner pour la solution**

*Le couple  $(\vec{U}, \vec{\sigma})$  est solution du problème d'élasticité si et seulement s'il rend stationnaire la fonctionnelle de Reissner sur le produit cartésien  $\mathbb{U} \times \mathbb{S}$*

On a en effet :

$$\begin{aligned} \text{grad}_u \mathcal{R}(\vec{U}, \vec{\sigma}) &= D^T \vec{\sigma} + \Phi \\ \text{grad}_\sigma \mathcal{R}(\vec{U}, \vec{\sigma}) &= -\text{grad}_\sigma(W_\sigma)(\vec{\sigma}) + D\vec{U} + \vec{\epsilon}^o \end{aligned}$$

la seconde relation étant obtenue après transposition du terme bilinéaire. La stationnarité en  $\vec{U}$  assure donc l'équilibre tandis que celle en  $\vec{\sigma}$  assure que  $Du + \epsilon^o$  et  $\vec{\sigma}$  sont associés par la loi de comportement élastique.

L'intérêt de  $\mathcal{R}$  est de permettre l'utilisation d'un espace de champs de contraintes aussi vaste que désiré ; la solution numérique correspondante réalise alors un compromis entre les équations d'équilibre et celles de comportement. En effet soient deux sous-espaces vectoriels  $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}$  et  $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}$  ; si  $(\vec{U}^*, \vec{\sigma}^*)$  rend  $\mathcal{R}$  stationnaire sur  $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{S}_1$  alors les gradients de  $\mathcal{R}$  appartiennent aux sous-espaces orthogonaux  $\mathbb{U}_1^o$  et  $\mathbb{S}_1^o$  :

$$\begin{aligned} \text{grad}_u \mathcal{R}(\vec{U}^*, \vec{\sigma}^*) &= D^T \vec{\sigma}^* + \Phi \in \mathbb{U}_1^o \\ \text{grad}_\sigma \mathcal{R}(\vec{U}^*, \vec{\sigma}^*) &= -\text{grad}_\sigma(W_\sigma)(\vec{\sigma}^*) + D\vec{U}^* + \vec{\epsilon}^o \in \mathbb{S}_1^o \end{aligned}$$

Ainsi  $D\vec{U}^* + \vec{\epsilon}^*$  ne vérifient-ils qu'approximativement la loi de comportement et l'équation d'équilibre.

## 6.5.2 La méthode de Reissner

### Méthode générale

Comme on suppose nuls les déplacements et les déformations de membrane les déplacements et déformations principaux (cf.3.22) se réduisent à :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= z \beta_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + z \beta_2(x_1, x_2) \vec{e}_2 + w(x_1, x_2) \vec{e}_3 \\ [\epsilon^p] &= \begin{bmatrix} [\chi] & \frac{1}{2} \{\gamma\} \\ \frac{1}{2} \langle \gamma \rangle & 0 \end{bmatrix} \text{ avec : } \vec{\chi} = grad_s \vec{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

On pratique l'approximation des contraintes planes à partir de :

$$\{\sigma^{(2)}\} = z [K^{(2)}] \{\kappa\} \quad (6.26)$$

où  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  sont des fonctions inconnues de  $(x_1, x_2)$ . La relation de départ (6.3) des estimations classiques du cisaillement s'écrit maintenant :

$$\left. \begin{aligned} -\tau_1 &= \kappa_{j,1} \int_{-h/2}^z z' K_{1,j}^{(2)}(z') dz' + \kappa_{j,2} \int_{-h/2}^z z' K_{3,j}^{(2)}(z') dz' \\ -\tau_2 &= \kappa_{j,1} \int_{-h/2}^z z' K_{3,j}^{(2)}(z') dz' + \kappa_{j,2} \int_{-h/2}^z z' K_{2,j}^{(2)}(z') dz' \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

expressions que Reissner généralise en remplaçant les six dérivées  $\kappa_{i,j}$  par six coefficients  $\lambda_k$ , fonctions inconnues de  $(x_1, x_2)$  :

$$\{\tau\} = -[A] \{\lambda\} \quad (6.28)$$

où  $[A]$  est la matrice :

$$[A] = \int_{-h/2}^z z' [A_0(z')] dz' \quad (6.29)$$

avec :

$$[A_0] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

On peut maintenant calculer les coefficients de la fonctionnelle de Reissner pour ces approximations ; on pose, par définition de  $[H^f], M, [A_I], T, [B]$  :

$$\left. \begin{aligned} [H^f] &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [K^{(2)}(z)] dz \\ [A_1] &= \int_{-h/2}^{h/2} [A(z)] dz \\ [B] &= \int_{-h/2}^{h/2} [A(z)]^T [K^c]^{-1} [A(z)] dz \\ \{M\} &= [H^f] \{\kappa\} \\ \{T\} &= -[A_1] \{\lambda\} \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

Le terme  $\langle u, D^T \sigma \rangle_u = \langle Du, \sigma \rangle_\epsilon$  s'écrit comme l'intégrale sur  $\Omega$  de la somme  $I^{(2)} + I^c$  avec :

$$I^{(2)} = \int_{-h/2}^{h/2} \langle \epsilon^{(2)} \rangle \{ \sigma^{(2)} \} dz = \langle \text{grad}_s \beta \rangle [H^f] \{ \kappa \}$$

$$I^c = \int_{-h/2}^{h/2} 2 \langle \epsilon_{13}, \epsilon_{23} \rangle \{ \tau \} dz = \langle \text{grad}^{(2)} w + \beta \rangle (-[A_1]) \{ \lambda \}$$

L'énergie élastique est l'intégrale sur  $\Omega$  de :

$$-I^w = \int_{-h/2}^{h/2} W_\sigma = \frac{1}{2} (\langle \kappa \rangle [H^f] \{ \kappa \} + \langle \lambda \rangle [B] \{ \lambda \})$$

Enfin le terme  $\langle u, \Phi \rangle_u$  est la somme de l'intégrale sur  $\Omega$  de  $I_\Omega^\Phi$  et de l'intégrale sur  $\partial\Omega$  de  $I_{\partial\Omega}^\Phi$  avec :

$$I_\Omega^\Phi = \langle w, \beta_1, \beta_2 \rangle \left\{ \begin{array}{c} p \\ c_1 \\ c_2 \end{array} \right\} \quad ; \quad I_{\partial\Omega}^\Phi = \langle w, \beta_1, \beta_2 \rangle \left\{ \begin{array}{c} P \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \right\}$$

La fonctionnelle de Reissner s'écrit donc (pour  $\epsilon^o = 0$ ) :

$$\mathcal{R}(w, \beta_1, \beta_2, \kappa, \lambda) = \int_\Omega (I^{(2)} + I^c + I^w + I^\Phi) + \int_{\partial\Omega} I_{\partial\Omega}^\Phi \quad (6.32)$$

On doit maintenant rendre  $\mathcal{R}$  stationnaire par rapport aux variables  $w, \beta, \kappa, \lambda$ . Comme nous étudions la distribution du cisaillement à l'intérieur de  $\Omega$  il nous suffit de considérer les champs  $w, \beta, \kappa, \lambda$  de support compact contenu dans  $\Omega$ .

On obtient tout d'abord, en remplaçant  $[H^f] \{ \kappa \}$  par  $M$  et  $[A_1] \{ \lambda \}$  par  $T$ , puis en utilisant le théorème flux-divergence :

$$\int_\Omega I^{(2)} = \int_\Omega \langle \beta \rangle \{ -\text{div}^{(2)} M \} dx_1 dx_2$$

$$\int_\Omega I^c = \int_\Omega (w \{ -\text{div}^{(2)} T \} + \langle \beta \rangle \{ T \}) dx_1 dx_2$$

La stationnarité en  $(w, \vec{\beta})$  fournit donc les équations d'équilibre classiques :

$$\left. \begin{array}{l} \text{div}^{(2)} M - T = -c \\ \text{div}^{(2)} T = -p \end{array} \right\}$$

Maintenant la stationnarité en  $\kappa$  entraîne, puisque  $grad_s^{(2)}\beta = \chi$  :

$$\{M\} = [H^f]\{\chi\}$$

Enfin, puisque  $grad^{(2)}w + \beta = \gamma$ , la stationnarité en  $\lambda$  entraîne :

$$[B]\{\lambda\} = -[A_1]^T\{\gamma\} \quad (6.33)$$

Si la matrice  $[B]$ , de dimensions  $6 \times 6$  est régulière on déduit de ce qui précède la solution cherchée :

$$\left. \begin{aligned} \{\lambda\} &= -[B]^{-1}[A_1]^T\{\gamma\} \\ \{\tau\} &= [A][B]^{-1}[A_1]^T\{\gamma\} \\ [H^c] &= [A_1][B]^{-1}[A_1]^T \\ \{T\} &= [H^c]\{\gamma\} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Mais  $[B]$  n'est pas nécessairement régulière, et certainement pas si la raideur  $[K]$  est indépendante de  $z$ .

### Cas où la raideur $K$ est constante

La matrice  $[A_0]$  est constante et l'on a :

$$[A] = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) [A_o] \quad ; \quad [A_1] = -\frac{h^3}{12}[A_o] \quad ; \quad [B] = \frac{h^5}{120}[A_o]^T[K^c]^{-1}[A_o]$$

et, comme le noyau de  $[A_o]$  est réduit à 0, il vient le résultat rassurant :

$$\{T\} = \frac{5}{6}[K^c]^{-1}\{\gamma\}$$

### Cas où la matrice $B$ n'est pas régulière

Comme la matrice  $A$  est de dimensions  $2 \times 6$  son rang est au plus de 2. On note qu'un vecteur  $\lambda$  est dans le noyau de  $B$  si et seulement s'il est dans celui de  $A(z)$  pour presque tout  $z$  : en effet l'intégrande  $z^2[A_0]^T[K^c]^{-1}[A_0]$  est positif ; alors  $\lambda$  est du même coup dans le noyau de  $[A_1]$ , ce qui permet la résolution de (6.33) dans tous les cas.

Soit en effet  $[\Lambda] = \langle \{\Lambda_1\}, \dots, \{\Lambda_6\} \rangle$  une base de vecteurs propres orthonormés  $\{\Lambda_i\}$  de  $[B]$  pour les valeurs caractéristiques  $\rho_i$  ; soit  $[diag(\rho_i)]$ , la matrice diagonale des  $\rho_i$ . Cherchons les  $\lambda_i$  sous la forme :

$$\{\lambda\} = [\Lambda]^T[\Phi]\{\gamma\}$$

où  $[\Phi]$  est une matrice  $6 \times 2$  inconnue, solution de :

$$[\Lambda]^T [B] [\Lambda] [\Phi] = -[\Lambda]^T [A_1]^T$$

soit :

$$[diag(\rho_i)] [\Phi] = -[\Lambda]^T [A_1]^T$$

ce qui se résout ligne par ligne :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{si } \rho_i \neq 0 & < \Phi_i > = -\frac{1}{\rho_i} < \Lambda_i > [A_i]^T \\ \text{si } \rho = 0 & < \Phi_i > = < 0, 0 > \end{array} \right\} \quad (6.35)$$

### 6.5.3 Application à la plaque stratifiée de référence

On reprend, à la façon de Reissner, l'exemple traité au paragraphe 6.3.1. On trouve les résultats intermédiaires suivants :

$$\text{si } |z| > 0.5 \quad [A_0](z) = \begin{bmatrix} 25. & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 1. & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{si } |z| < 0.5 \quad [A_0](z) = \begin{bmatrix} 1. & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 25. & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -1.833 & -0.021 & 0 & 0 & 0 & -0.042 \\ 0 & 0 & -0.42 & -0.021 & 0.333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 16.135 & 0.191 & 0 & 0 & 0 & 0.382 \\ 0.191 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0.005 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0.003 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003 & 0.001 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.041 & 0.020 & 0.441 & 0 \\ 0.382 & 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

Le tableau suivant donne les valeurs caractéristiques et les vecteurs propres associés ; chaque colonne est formée de la valeur caractéristique suivie des composantes du vecteur propre associé ;

$$\begin{bmatrix} 16.146 & 0.445 & 0.002 & 0.0001 & 0 & 0 \\ -1.000 & 0 & 0 & -0.026 & 0 & 0 \\ -0.012 & 0 & 0 & 0.447 & 0.017 & -0.894 \\ 0 & -0.092 & 0.890 & 0 & 0.447 & 0.008 \\ 0 & -0.046 & 0.445 & 0 & -0.894 & -0.017 \\ 0 & -0.995 & -0.103 & 0 & 0 & 0 \\ -0.024 & 0 & 0 & 0.894 & -0.008 & 0.447 \end{bmatrix}$$



On obtient finalement le résultat :

$$[H^c] = \begin{bmatrix} 0.244 & 0 \\ 0 & 0.322 \end{bmatrix}$$

et les coefficients de correction sont 0.70 et 0.92.

Le tracé des contraintes de cisaillement est assez décevant en ce qui concerne  $\tau_1$ , acceptable en ce qui concerne  $\tau_2$ . On présente sur la même figure les courbes correspondantes obtenues avec les approches du paragraphe 6.3.1.

Il est assez remarquable que les six courbes aient deux points d'intersection communs !

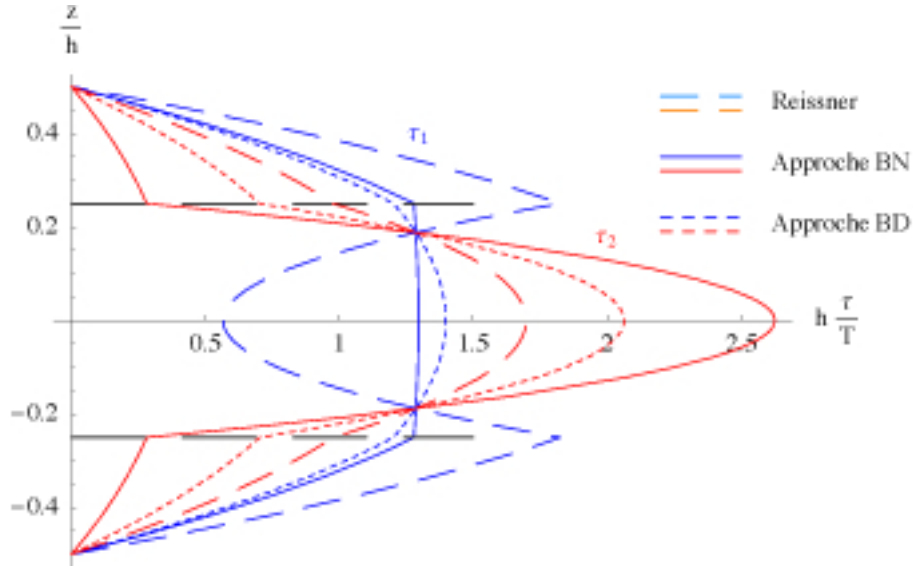


FIGURE 6.4 – Contraintes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  pour  $T_1 = 1$  et  $T_2 = 1$ .

On constate que les courbes obtenues pour la plaque stratifiée sont relativement voisines. Mais ce sont cependant les écarts entre les estimations du cisaillement qui laisseront l'ingénieur perplexe pour l'évaluation du danger de délaminage. En prenant en compte le comportement des déformations et des déplacements au voisinage du point  $(x_1, x_2)$  considéré, la méthode du déplacement complémentaire nous donnera des informations aussi précises que désiré.

## 6.6 Calcul du déplacement de cisaillement

L'hypothèse (6) ne suppose pas que les normales restent rectilignes. Pour en calculer la déflexion il suffit d'intégrer

$$\frac{\partial \vec{U}^{(2)}}{\partial z} = (K^c)^{-1} \vec{\tau}$$

où  $\vec{U}^{(2)}$  désigne la partie plane du déplacement total. On peut ensuite en extraire, à l'aide des formules (3.9) les déplacements principal  $\vec{V}^{(2)}$  et complémentaire  $\vec{u}^{(2)}$  correspondants. Notons que  $\vec{V}^{(2)} \neq [H^c]^{-1} \vec{T}$ . On obtient les résultats décrits par la figure 6.5. On les y compare à ceux de la plaque homogène dont la raideur  $[K^c]$  est la moyenne de celles des couches :

$$[K^c] = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

Les résultats sont comparables dans la situation BN.

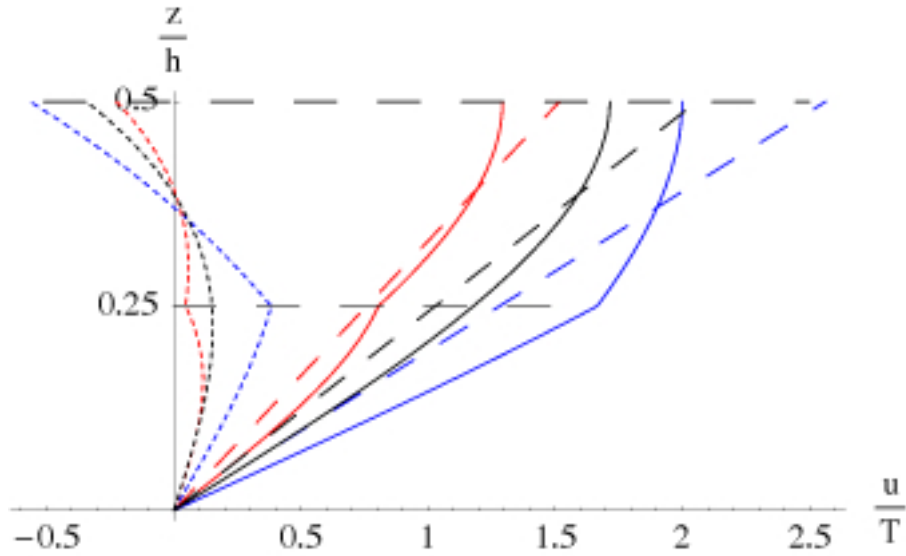


FIGURE 6.5 – Déplacements transversaux pour la situation BD et pour la plaque homogène lorsque  $T_1 = 1$  et  $T_2 = 1$ . On représente en bleu les composantes 1, en rouge les composantes 2, en noir les deux composantes confondues de la plaque homogène. En trait plein les déplacements totaux, en tireté long les déplacements principaux, en tireté court les déplacements complémentaires.

# Chapitre 7

## La théorie du déplacement complémentaire

### 7.1 Introduction

#### But de la méthode

On se propose de compléter les méthodes classiques en affinant la description du milieu tridimensionnel à partir des déformations principales que ces dernières permettent de calculer sans se préoccuper du déplacement complémentaire.

C'est en particulier le cas des effets de cisaillement transverse : les théories classiques présentées au chapitre 6 ne sont satisfaisantes que sous certaines hypothèses telles que celles notées précédemment BD ou BN et qui concernent le gradient du moment de flexion-torsion. En revanche la méthode du déplacement complémentaire n'en nécessite aucune dès qu'on connaît un développement limité des déformations principales au voisinage du point  $(x, y)$  considéré, ce que fournit bien évidemment le calcul préliminaire par éléments finis.

#### Déplacement complémentaire et principe de Saint-Venant

L'hypothèse de rigidité des normales, base des théories classiques, implique l'équivalence de deux systèmes d'efforts exercés sur une normale et de mêmes éléments de réduction au milieu de celle-ci : c'est précisément l'énoncé du "principe de Saint-Venant".

Au chapitre 3 on a écrit le déplacement total  $\vec{U}$  sous la forme d'une somme d'un "déplacement principal"  $\vec{V}$  et d'un "déplacement complémentaire"  $\vec{u}$ . Le principe du travail virtuel fournit l'équation d'équilibre de l'effort extérieur

$\Phi$  avec le champ de contraintes  $\vec{\sigma}$  :

$$\forall \delta \vec{U} \in \mathbb{U} \quad \langle \delta \vec{U}, \Phi \rangle_u + \langle D\delta \vec{U}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0$$

évidemment équivalente au système des deux équations :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \delta \vec{V} \in \mathbb{U}_p \quad \langle \delta \vec{V}, \Phi \rangle_u + \langle D\delta \vec{V}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \\ \forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U}_c \quad \langle \delta \vec{u}, \Phi \rangle_u + \langle D\delta \vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

La méthode du déplacement complémentaire adopte ce même principe de Saint-Venant sans pour autant rigidifier les normales, mais en considérant seulement, parmi tous les systèmes d'efforts de mêmes éléments de réduction, celui qu'on obtient par relèvement de ces derniers. Alors, dans la seconde des équations (7.1), le terme  $\langle \delta \vec{u}, \Phi \rangle_u$  est nul. Associée à la loi de comportement tridimensionnel, cette équation devient une équation aux dérivées partielles sur le déplacement complémentaire  $\vec{u}$  (cf.7.9). Puis, si les données sont polynomiales en  $(x, y)$ , cette équation se ramène à une équation différentielle ordinaire sur la variable  $z$ , pour les coefficients  $\{c(z)\}$  du polynôme inconnu  $\vec{u}$  (cf.8.3).

## Une théorie du milieu indéfini

On sait que les modèles bidimensionnels de plaque ne donnent satisfaction qu'à l'intérieur du domaine plan  $\Omega$ , c'est-à-dire à une certaine distance du bord, distance qui est de l'ordre de l'épaisseur. Aussi la théorie du déplacement complémentaire a-t-elle pour but de modéliser au mieux le comportement de cette région intérieure ; l'équation aux dérivées partielles évoquée plus haut porte donc sur ce qu'il est coutume d'appeler un "milieu indéfini".

*Notons que cette approche de la théorie des plaques est pratiquement optimale : comme les autres elle est fondée sur le principe de Saint-Venant et ne prétend pas à la validité au voisinage des bords. Ces réserves communes admises elle est exacte.*

## 7.2 Lois d'effort

Commençons par une définition générale :

### Définition 2

Soient  $\mathbb{X}$  l'espace de configuration d'une structure mécanique  $S$  et  $\mathbb{Y}$  l'espace des efforts exercés sur celle-ci. On appelle "loi d'effort" sur  $S$  une correspondance  $\mathcal{F}$  entre l'espace  $\tilde{\mathbb{X}}$  des histoires  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{X}$  et celui,  $\tilde{\mathbb{Y}}$ , des histoires  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{Y}$ .

D'une façon très générale cette correspondance est une "multi-application"<sup>1</sup>, c'est-à-dire qu'à l'histoire  $x \in \tilde{\mathbb{X}}$  correspond un ensemble  $\mathcal{F}(x) \subset \tilde{\mathbb{Y}}$ . Une représentation symétrique de cette correspondance est son graphe

$$\tilde{\mathbb{G}} = \left\{ (x, y) \in \tilde{\mathbb{X}} \times \tilde{\mathbb{Y}} : y \in \mathcal{F}(x) \right\}$$

Les opérateurs de déformation et la loi du comportement élastique sont indépendants du temps; aussi nous nous limiterons à des lois d'effort extérieur elles-mêmes indépendantes du temps, c'est-à-dire définies par une correspondance entre les espaces  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  eux-mêmes<sup>2</sup>. On rappelle que les liaisons linéaires sans frottement sont classiquement des lois d'effort définies par leur graphe  $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_1^o$  où  $\mathbb{X}_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{X}_1^o$  son polaire.

### Équivalence entre loi d'effort et loi d'effort généralisé

Considérons maintenant une loi d'effort  $\mathcal{F}$  définie sur le modèle tridimensionnel de la plaque et reportons nous à la figure 3.1 reproduite ci-dessous pour le confort du lecteur.

<i>Var.</i>	<i>Dualités</i>	<i>Var.</i>
$U$	$\mathbb{U} = \mathbb{U}_p \oplus \mathbb{U}_c$	$\Phi$
	$A \downarrow \quad \uparrow A^\dagger$	
$q$	$\mathbb{U}_R = A(\mathbb{U})$	$Q$
	$\langle \cdot, \cdot \rangle_u$	
	$\mathbb{F} \supset A^T(\mathbb{F}_R) = \mathbb{U}_c^o$	
	$A^{\dagger T} \downarrow \quad \uparrow A^T = A^{\dagger T \dagger}$	
	$\langle \cdot, \cdot \rangle_q$	
	$\mathbb{F}_R = A^{\dagger T}$	

FIGURE 7.1 – Passage 3D-2D pour les déplacements et les charges

Rappelons-nous que  $\mathbb{U}_R$  et  $\mathbb{F}_R$  sont respectivement les espaces des déplacements généralisés  $q$  et des efforts généralisés  $Q$ . Le produit de composition

$$\mathcal{Q} = A^{\dagger T} \circ \mathcal{F} \circ A^\dagger : \mathbb{U}_R \mapsto \mathbb{F}_R$$

définit une loi d'effort généralisée associée à  $\mathcal{F}$ ; sont-elles équivalentes?

#### Définition 3

Nous dirons que la loi d'effort  $\mathcal{F}$  et la loi d'effort généralisé  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes si :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q} &= A^{\dagger T} \circ \mathcal{F} \circ A^\dagger \\ \mathcal{F} &= A^T \circ \mathcal{Q} \circ A \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

---

1. On dit aussi "application multivoque".  
2. Il s'agit seulement de ne pas alourdir un peu plus les notations, mais les résultats sont généraux.

En d'autres termes  $\mathcal{Q}$  contient toute l'information contenue dans  $\mathcal{F}$ .

On démontre aisément la

**Proposition 13** (et définition de la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$ )

Il existe une loi d'effort généralisée équivalente à la loi d'effort  $\mathcal{F}$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall U \in \mathbb{U} : \mathcal{F}(U) \subset \mathbb{U}_c^\circ = A^T(\mathbb{F}_R) \\ \forall U \in \mathbb{U} \quad \forall u \in \mathbb{U}_c : \mathcal{F}(U + u) = \mathcal{F}(U) \end{array} \right\} \quad (7.3)$$

Nous dirons alors qu'une telle loi d'effort possède la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$ .<sup>3</sup>

Cas trivial : notons que si la valeur de la charge  $\Phi$  est imposée la loi d'effort correspondante possède la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$ .

Pour qu'on puisse travailler dans le cadre d'un modèle de plaque la proposition suivante, elle aussi de démonstration immédiate, impose en pratique d'écrire les conditions aux limites de type géométrique en termes des seuls déplacements principaux :

**Proposition 14**

Soit  $U_o + \mathbb{U}_1$  une variété affine de  $\mathbb{U}$  ; la liaison sans frottement qui lui est associée est définie par son graphe ci-dessous :

$$(U, \Phi_1) \in (U_o + \mathbb{U}_1) \times \mathbb{U}_1^\circ \quad (7.4)$$

où  $\Phi_1$  désigne l'effort de liaison. Cette loi d'effort possède la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$  si et seulement si l'espace vectoriel  $\mathbb{U}_1$  contient tous les déplacements complémentaires :  $\mathbb{U}_c \subset \mathbb{U}_1$ .

## 7.3 Équivalence éventuelle des problèmes d'équilibre tridimensionnel et bidimensionnel

On notera les lois constitutives comme des multi-applications :

- $\sigma \in \mathcal{K}_3(\epsilon)$  pour le modèle tridimensionnel,
- $Z \in \mathcal{K}_R(\zeta)$  pour le modèle bidimensionnel.

Même si la loi de comportement  $\mathcal{K}_3$  est une correspondance locale il n'en est pas nécessairement de même pour la loi associée  $\mathcal{K}_R$ . Nous avons d'ailleurs vu qu'il ne pouvait en être ainsi pour le modèle de Reissner, alors que celui de Kirchhoff admet la loi locale (5.8).

---

3. "SV" en hommage à Saint-Venant

Ceci précisé posons deux problèmes d'équilibre dont nous allons étudier l'équivalence lorsque les lois d'effort  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes et que la loi constitutive de plaque  $\mathcal{K}_R$  est convenablement choisie.

Pour le confort du lecteur nous affichons ci-dessous une réplique de la figure 3.2.

<i>Var.</i>		<i>Dualités</i>		<i>Var.</i>
$U$	$\mathbb{U} = \mathbb{U}_p \oplus \mathbb{U}_c$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_u$	$\mathbb{F} \supset A^T(\mathbb{F}_R) = \mathbb{U}_c^o$	$\Phi$
	$A \downarrow \quad \uparrow A^\dagger$		$A^{\dagger T} \downarrow \quad \uparrow A^T = A^{\dagger T \dagger}$	
$q$	$\mathbb{U}_R = A(\mathbb{U})$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_q$	$\mathbb{F}_R = A^{\dagger T}(\mathbb{S}_R)$	$Q$
	$D_R \downarrow$		$\uparrow D_R^T$	
$\zeta$	$\mathbb{E}_R = D_R(\mathbb{U}_R) = B(\mathbb{E}_p)$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_\zeta$	$\mathbb{S}_R = B^T(\mathbb{S})$	$Z$
	$B^\dagger \downarrow \quad \uparrow B$		$B^T \downarrow \quad \uparrow B^{\dagger T}$	
$\vec{\epsilon}^p$	$\mathbb{E}_p = D(\mathbb{U}_p) = B^\dagger(\mathbb{E}_R)$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$	$\mathbb{S}$	$\vec{\sigma}$

FIGURE 7.2 – Passage 3D-2D

Le problème d'équilibre du solide tridimensionnel est défini par le système<sup>4</sup> :

$$\forall \delta \vec{V} \in \mathbb{U}_p \quad \langle \delta \vec{V}, \Phi \rangle_u + \langle \text{grad}_s \delta \vec{V}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \quad (7.5a)$$

$$\Phi \in \mathcal{F}(\vec{V} + \vec{u}) \quad (7.5b)$$

$$\vec{\epsilon} = \text{grad}_s(\vec{V} + \vec{u}) + \vec{\epsilon}_o \quad (7.5c)$$

$$\forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U}_c \quad \langle \delta \vec{u}, \Phi \rangle_u + \langle \text{grad}_s \delta \vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \quad (7.5d)$$

$$\vec{\sigma} \in \mathcal{K}_3(\vec{\epsilon}) \quad (7.5e)$$

et celui de la plaque de Reissner par le système :

$$\forall \delta q \in \mathbb{U}_R \quad \langle \delta q, Q \rangle_q + \langle D_R \delta q, Z \rangle_\zeta = 0 \quad (7.6a)$$

$$Q \in \mathcal{Q}(q) \quad (7.6b)$$

$$\zeta = D_R q \quad (7.6c)$$

$$Z \in \mathcal{K}_R(\zeta) \quad (7.6d)$$

dont la donnée est la charge généralisée  $Q$  et les inconnues  $q$ ,  $\zeta$ , et  $Z$ .

4. A ce stade peu importe quelles variables sont données ou inconnues.

Rappelons que les variables concernées par ces deux systèmes sont liées par les relations établies au chapitre 2.2.4 :

$$q = A \vec{V}; \vec{V} = A^\dagger q \quad (7.7a)$$

$$Q = A^{\dagger T} \Phi; \Phi = A^T Q \quad (7.7b)$$

$$\text{grad}_s \vec{V} = B^\dagger \zeta; Z = B^{\dagger T} \vec{\sigma} \quad (7.7c)$$

#### Théorème 4

Soient  $\vec{\epsilon}^o$  une déformation imposée et  $\mathcal{K}_R : \mathbb{E}_R \mapsto \mathbb{S}_R$  la loi d'effort définie par :

$$\begin{aligned} Z \in \mathcal{K}_R(\zeta) &\iff \exists \vec{u} \in \mathbb{U}_c \quad \exists \vec{\sigma} \in \mathcal{K}_3(B^\dagger \zeta + \text{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}^o) \\ \vec{u} \text{ et } \vec{\sigma} \text{ vérifiant : } &\begin{cases} Z = B^{\dagger T} \vec{\sigma} \\ \forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U}_c \quad \langle \text{grad}_s \delta u, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Si la loi d'effort  $\mathcal{F}$  possède la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$  les systèmes 7.5 et 7.6 sont équivalents.

En effet on a vu que la propriété  $\mathcal{P}_{SV}$  entraîne l'équivalence des lois d'effort  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{Q} = A^{\dagger T} \circ \mathcal{F} \circ A^\dagger$ . Alors les relations (7.7) entraînent l'équivalence des systèmes {7.5a,7.5b} et {7.6a,7.6b}.

D'autre part, comme  $\Phi \in \mathbb{U}_c^\circ$  d'après (7.7b), le terme  $\langle \delta \vec{u}, \Phi \rangle_u$  de l'équation (7.5d) disparaît.

Ensuite, la relation (7.7c) permet d'écrire la relation (7.5c) sous la forme :

$$\vec{\epsilon} = B^\dagger \zeta + \text{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}^o$$

en sorte que, la loi  $\mathcal{K}_R$  étant définie par (7.8), si  $(\vec{V}, \Phi, \vec{u}, \vec{\epsilon}, \vec{\sigma})$  est solution du système (7.5),

alors :

$$(q = A \vec{V}, Q = A^T \Phi, \zeta = B \text{grad}_s \vec{V}, Z = B^{\dagger T} \vec{\sigma})$$

est solution du système (7.6).

Inversement soit  $(q, Q, \zeta, \vec{u}, \vec{\sigma})$  une solution du système (7.6), alors :

$$(\vec{V} = A^\dagger q, \Phi = A^T Q, \vec{u}, \vec{\epsilon} = \text{grad}_s(A^\dagger q + \vec{u}) + \vec{\epsilon}^o, \vec{\sigma})$$

est solution du système (7.5), ce qui achève la démonstration.



## 7.4 Équation différentielle du déplacement complémentaire

Le problème fondamental est de déterminer la loi d'effort  $\mathcal{Q}$ . Ceci nécessite de trouver, pour une déformation généralisée  $\zeta$  donnée, le déplacement complémentaire  $\vec{u}$  et la contrainte  $\vec{\sigma}$ . C'est pourquoi on peut qualifier le système suivant de "système résolvant" du problème d'équilibre :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \in \mathbb{U}_c \\ \forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U}_c : \langle \text{grad}_s \delta \vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \\ \vec{\sigma} \in \mathcal{K}_3(B^\dagger \zeta + \text{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}^o) \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

L'inconnue est le couple  $(\vec{u}, \vec{\sigma})$  et les données sont  $\mathcal{K}_3$ ,  $\zeta$  et  $\vec{\epsilon}^o$ .

Même si la loi tridimensionnelle  $\mathcal{K}_3$  est locale la loi de plaque définie par (7.8) n'a aucune chance de l'être, c'est-à-dire de relier directement les valeurs  $\zeta(x_1, x_2)$  et  $Z(x_1, x_2)$ . Elle dépend en effet du contour et aussi, comme on l'a vu à propos de l'effort tranchant, de la géométrie déformée au voisinage du point considéré. Ce n'est guère surprenant puisqu'un simple changement de variables a permis de construire un système (7.6) équivalent au système tridimensionnel (7.5). On ne peut donc en attendre aucune simplification fondamentale.

Pour remédier à ces deux inconvénients et déduire de (7.9) des résultats utilisables avec le modèle de plaque on va :

- 1°) n'utiliser que des champs-tests  $\delta \vec{u}(x_1, x_2, z)$  nuls dès que  $(x_1, x_2) \notin \Omega$ , ce qui donnera une équation valable à l'intérieur de cet ouvert,
- 2°) approcher la géométrie déformée par un développement limité au voisinage du point considéré.

### Notations 3

Soient :

- $\mathbb{U}^\Omega$  le sous-espace de  $\mathbb{U}$  constitué des champs  $\vec{U}$  nuls hors d'un cylindre  $K \times \mathbb{R}$  où  $K$  est un compact contenu dans  $\Omega$  ;
- $\mathbb{U}_p^\Omega = A(\mathbb{U}^\Omega)$  l'espace correspondant des déplacements principaux,
- $\mathbb{U}_c^\Omega = (I_\mathbb{U} - A)(\mathbb{U}^\Omega)$  l'espace correspondant des déplacements complémentaires.

### Proposition 15

Le polaire de l'espace  $\mathbb{U}^\Omega$  est l'espace des efforts de la forme  $\Phi = (0, 0, 0, \vec{F}^3)$

En effet soit  $\Phi = (\vec{f}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \in (\mathbb{U}_c^\Omega)^\circ$ .

L'espace  $D(\Psi)^3$  est contenu dans  $\mathbb{U}_c^\Omega$  en sorte que  $\vec{f} = 0$ .

Ensuite les champs de la forme  $\vec{U}(x_1, x_2, z) = \vec{U}_1(x_1, x_2)$  où :  $\vec{U}_1 \in D(\Omega)^3$  appartiennent à  $\mathbb{U}_c^\Omega$  en sorte que  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont nulles.

Inversement si la charge est de la forme  $\Phi = (0, 0, 0, \vec{F}_3)$  elle appartient à  $(\mathbb{U}_c^\Omega)^\circ$  puisque les éléments de  $\mathbb{U}_c^\Omega$  sont nuls au voisinage de  $\partial_3\Psi$ .

### Proposition 16

Le polaire de l'espace  $\mathbb{U}_c^\Omega$  est l'ensemble des efforts de la forme :

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\vec{f}, 0, 0, \vec{F}^3\} \\ \text{avec : } \vec{f} &= (\lambda_1 + \lambda_4 z)\vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_5 z)\vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (7.10)$$

En effet suivons la démarche déjà utilisée pour démontrer la proposition 10 (§ 3.3), à savoir :  $(\mathbb{U}_c)^\circ = A^T(\mathbb{F}_R)$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall \vec{u} \in \mathbb{U}_c^\Omega & : \langle \vec{u}, \Phi \rangle_u = 0 \\ \forall \vec{U} \in \mathbb{U}^\Omega & : \langle \vec{U} - A^\dagger A \vec{U}, \Phi \rangle_u = 0 \\ \forall \vec{U} \in \mathbb{U}^\Omega & : \langle \vec{U}, \Phi - A^T A^{\dagger T} \Phi \rangle_u = 0 \\ \Phi &\in A^T A^{\dagger T} \Phi + (\mathbb{U}^\Omega)^\circ \\ \Phi &\in \mathbb{F}_r + (\mathbb{U}^\Omega)^\circ \end{aligned}$$

et d'après la proposition 15 (§ 7.4) et les relations (3.20) on a bien (7.10) avec :

$$\lambda_1 = \frac{g_1}{h} ; \lambda_4 = \frac{12c_1}{h^3} ; \lambda_2 = \frac{g_2}{h} ; \lambda_5 = \frac{12c_2}{h^3} ; \lambda_3 = \frac{p}{h} \quad (7.11)$$

Le système (7.9) a pour conséquence le système suivant qui est en quelque sorte sa restriction à l'intérieur de  $\Omega$  (ou équations en "milieu indéfini") :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &\in \mathbb{U}_c \\ \forall \delta \vec{u} \in \mathbb{U}_c^\Omega & : \langle \text{grad}_s \delta \vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = 0 \\ \vec{\sigma} &\in \mathcal{K}_3(B^\dagger \zeta + \text{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}_o) \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

On va maintenant expliciter ce système par le

### Théorème 5 Équations du milieu indéfini

Le système (7.12) s'écrit sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{u} \, dz &= 0 ; \int_{-h/2}^{h/2} u_1 \, z \, dz = 0 ; \int_{-h/2}^{h/2} u_2 \, z \, dz = 0 \\ \text{div } \vec{\sigma} &= (\lambda_1 + \lambda_4 z)\vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_5 z)\vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = 0 \text{ pour } z = \pm h/2 \\ \vec{\sigma} &\in \mathcal{K}_3(B^\dagger \zeta + \text{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}_o) \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

En effet :

Tout d'abord la condition  $\vec{u} \in \mathbb{U}_c$  s'écrit aussi en termes des équations de liaison qui figurent à la première ligne de (7.13).

Ensuite pour  $\delta\vec{u} \in \mathbb{U}_c^\Omega$  on a :

$$\langle grad_s \delta\vec{u}, \vec{\sigma} \rangle_\epsilon = \int_\Psi grad_s \delta\vec{u} : \vec{\sigma} = - \int_\Psi \delta\vec{u} \cdot div \sigma - \int_{\partial\Psi_1} \delta\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_3 + \int_{\partial\Psi_2} \delta\vec{u} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_3$$

en sorte que  $(div \vec{\sigma}, \vec{\sigma}_{13}, \vec{\sigma}_{23}, 0)$  appartient à  $(\mathbb{U}_c^\Omega)^\circ$  ; d'après la proposition 16 7.4), la deuxième équation du système (7.12) équivaut alors aux équations des deuxième et troisième lignes du système (7.13). Les  $\lambda_i$  apparaissent comme les multiplicateurs de Lagrange associés aux cinq équations de liaison scalaires écrites dans et que les relations (7.11) permettent d'interpréter en termes d'efforts généralisés.

On a donc un système différentiel du second ordre pour les inconnues  $\vec{u}$ ,  $\vec{\sigma}$  et les cinq multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$ . Les données sont  $\zeta$  et  $\vec{\epsilon}_o$ .

## 7.5 La variante de Kirchhoff

### Idée générale

Nous avons introduit la notion de déplacement complémentaire à propos du modèle de Reissner-Mindlin ; cette notion peut en fait concerner beaucoup d'autres modèles et en particulier celui de Kirchhoff. Deux points essentiels en fondent la théorie :

1. la décomposition du déplacement total en deux termes, le principal et le complémentaire,
2. l'orthogonalité des charges à tout déplacement complémentaire.

Considérons alors une plaque modélisée selon Reissner d'une part, selon Kirchhoff d'autre part, et soumise à des efforts extérieurs admissibles par les deux modèles. On aimerait que la méthode du déplacement complémentaire conduise à la même solution dans les deux cas.

### Décomposition du déplacement total

Dans le modèle de Kirchhoff le déplacement principal est

$$\begin{aligned} \vec{V}(x_1, x_2, z) &= v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 + w(x_1, x_2)\vec{e}_3 \\ &\quad - z \frac{\partial w}{\partial x}(x_1, x_2)\vec{e}_1 - z \frac{\partial w}{\partial y}(x_1, x_2)\vec{e}_2 \\ &= \vec{v}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)\vec{e}_3 - z grad^{(2)}w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

De la même façon qu'au chapitre 3 (confer 3.9) le déplacement généralisé  $q = (\vec{v}, w)$  est une fonction linéaire  $A_K(\vec{U})$  du déplacement total  $\vec{U}$  :

$$q = A_K(\vec{U}) \quad \text{avec :} \quad (v_1, v_2, w) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (U_1, U_2, U_3) dz \quad (7.15)$$

Le déplacement complémentaire  $\vec{u}^K$  est alors solution des trois équations de liaison scalaires :

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_j^K dz = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.16)$$

Dans le déplacement principal la normale reste normale à la surface moyenne ; c'est le déplacement complémentaire qui engendrera la déformation de cisaillement notée  $\vec{\gamma}$  : c'est une déformation principale dans le modèle de Reissner et qui deviendra complémentaire pour celui de Kirchhoff.

#### Notations 4

Nous noterons

$$\zeta_K = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}_K) \quad (7.17)$$

les déformations généralisées de Kirchhoff. On notera aussi l'application  $B_K^\dagger$  :

$$[\epsilon^p] = B_K^\dagger(\zeta_K) = \begin{bmatrix} [\epsilon^m + z\chi_K] & \{0\} \\ < 0 > & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

qui correspond à l'application  $B^\dagger$  du modèle de Reissner.

On notera enfin  $\mathbb{U}_{c,K}^\Omega$  l'espace des déplacements complémentaires nuls en dehors d'un cylindre de base compacte contenue dans  $\Omega$ , espace analogue à  $\mathbb{U}_c^\Omega$  pour le modèle de Reissner.

En répétant le processus suivi pour Reissner on a d'abord la proposition analogue à la proposition 16 (7.10) :

#### Proposition 17

Le polaire de l'espace  $\mathbb{U}_{c,K}^\Omega$  est l'ensemble des efforts de la forme :

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\vec{f}, 0, 0, \vec{F}^3\} \\ \text{avec :} \quad \vec{f} &= \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (7.19)$$

qui conduit au système résolvant suivant, analogue à (7.13) :

*Équations du milieu indéfini pour le déplacement complémentaire du modèle de Kirchhoff*

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{u} \, dz &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{\sigma} &= \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= 0 \text{ pour } z = \pm h/2 \\ \vec{\sigma} &\in \mathcal{K}_3(B_K^\dagger \zeta_K + \operatorname{grad}_s \vec{u} + \vec{\epsilon}_o) \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Considérons une solution  $(\vec{u}_K, \vec{\sigma}_K, \lambda_1^K, \lambda_3^K, \lambda_5^K)$  du système (7.20) pour les données  $(\zeta_K, \vec{\epsilon}_o)$ . On décompose  $\vec{u}_K$  en :

$$\vec{u}_K = \vec{\beta}_K z + \vec{u}_R \text{ avec : } \vec{\beta}_K = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{u}_K \, dz \quad (7.21)$$

et  $\vec{u}_R$  vérifie les équations de liaisons du système (7.13). On peut maintenant compléter la déformation généralisée de Kirchhoff  $\zeta_K = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}_K)$  pour lui associer celle de Reissner :

$$\zeta_R = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}_R = \vec{\chi}_K + \operatorname{grad}_s \vec{\beta}_K, \vec{\gamma} = \vec{\beta}_K) \quad (7.22)$$

Alors  $(\vec{u}_R, \vec{\sigma}_R, \lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_4^K = 0, \lambda_5^K = 0)$  est solution du système (7.13) pour les données  $(\zeta_R, \vec{\epsilon}_o)$ .

Inversement soit  $(\vec{u}_R, \vec{\sigma}_R, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_4^R, \lambda_5^R)$  une solution du système (7.13) pour les données  $(\vec{\epsilon}^o, \zeta_R = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}_R = \vec{\chi}_R, \vec{\gamma}))$ . Pour qu'elle s'identifie à une solution du système (7.13) il est nécessaire que  $\lambda_4^R$  et  $\lambda_5^R$  soient nuls. Alors  $(\vec{u}_R + \vec{\gamma}z, \vec{\sigma}_R, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R)$  est solution du système (7.20) pour les données

$$(\vec{\epsilon}^o, \zeta_K = (\vec{\epsilon}^m, \vec{\chi}_R - \operatorname{grad}_s \vec{\gamma})). \quad (7.23)$$

On peut donc énoncer :

### **Théorème 6**

**Équivalence partielle des problèmes du déplacements complémentaires pour Kirchhoff et pour Reissner**

*A toute solution  $(\vec{u}_K, \vec{\sigma}_K, \lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K)$  du problème de déplacement complémentaire de Kirchhoff (cf. 7.20) on peut associer une solution du problème de déplacement complémentaire de Reissner (cf. 7.13), définie par les relations (7.21 et 7.22).*

*Inversement à toute solution du système (7.13) dans laquelle  $\lambda_4^R$  et  $\lambda_5^R$  sont nuls on peut associer une solution du système (7.20) pour les données (7.23).*

# Chapitre 8

## Calcul des plaques élastiques stratifiées

Dans ce chapitre on suppose nulle la déformation imposée  $\vec{\epsilon}^o$ . On note :  
 $n$  le nombre de couches,  
( $z_1 = -h/2, z_2, \dots, z_k, \dots, z_{n+1} = h/2$ ) les cotes des interfaces,  
 $K^{(k)}$  la raideur de la couche  $k$ .

### 8.1 Technique de calcul

#### 8.1.1 Solutions polynomiales dans une couche homogène

Revenons au système (7.13) où l'on remplace la loi générale  $\mathcal{K}_3$  par une loi élastique de raideur  $K^{(k)}$  constante dans chaque couche. Pour obtenir un système "générique" on remplace les conditions aux limites en  $z = \pm h/2$  par des conditions plus générales applicables en  $z = 0$  à chacune des couches en y remplaçant  $z$  par  $z - z_k$  et  $z_0$  par  $z_k$  :

#### Système générique

$$K \operatorname{div} \operatorname{grad}_s \vec{u} = -K \operatorname{div} (B^\dagger \zeta + \epsilon^o) + (\lambda_1 + \lambda_4(z + z_0))\vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_5(z + z_0))\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \quad (8.1a)$$

$$\vec{\sigma} = K(\operatorname{grad}_s \vec{u} + B^\dagger \zeta) \quad (8.1b)$$

$$\vec{\sigma}(x, y, 0) \cdot \vec{e}_3 = \vec{\sigma}_0(x, y) \vec{e}_3 \quad (8.1c)$$

$$\vec{u}(x, y, 0) = \vec{u}_0(x, y) \quad (8.1d)$$

Les inconnues sont  $\vec{u}$  et  $\vec{\sigma}$  tandis que les quantités  $K, \lambda_i, \vec{u}_0, \vec{\sigma}_0, \zeta$  sont données de façon formelle.

C'est évidemment la puissance des outils de calcul formel qui facilite considérablement cette approche<sup>1</sup>.

Toutes les fonctions en cause sont des fonctions de  $(x, y, z)$  où les variables  $z$  d'une part et  $(x, y)$  d'autre part jouent des rôles très différents.

Lorsque les données précédentes sont polynomiales de degré  $d_{xy}$  en  $(x, y)$  l'équation (8.1.a) impose de rechercher une solution  $u$ , polynomiale en  $(x, y)$  et de même degré  $d_{xy}$ . Pour simplifier l'exposé nous écrirons les formules dans le cas où l'on a choisi le degré  $d_{xy} = 2$ . Le nombre de monômes pour le degré  $d_{xy}$  est :

$$\beta_{xy} = \frac{(d_{xy} + 1)(d_{xy} + 2)}{2} \quad (8.2)$$

Cherchons la solution  $u$  sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } [c] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} & c_{18} \end{bmatrix}$$

où la matrice  $[c]$ , de dimension  $3 \times \beta_{xy}$  est une fonction inconnue de  $z$ . Le premier membre de (8.1.a) se met alors sous la forme :

$$K \operatorname{div} \operatorname{grad}_s \vec{u} = [A_2] \frac{d^2 \{c\}}{dt^2} + [A_1] \frac{d \{c\}}{dt} + [A_0] \quad (8.3)$$

où  $\{c\}$  la colonne des  $c_j$  et les  $[A_i]$  des matrices carrées (de dimension  $18 \times 18$  pour le degré  $d_{xy} = 2$ ) qui ne dépendent que de  $K$ .

**On est donc ramené à une équation différentielle du second ordre pour l'inconnue  $\{c\}$** , équation qui, en outre, est linéaire et à coefficients constants.

On trouve que le déterminant  $\operatorname{Det}([A_2]r^2 + [A_1]r + [A_0])$  est de la forme  $mr^\alpha$  où  $m$  est constant et ne dépend que de la raideur  $K$ , avec  $\alpha = 36$  dans le cas du degré 2 en  $(x, y)$ . Toutes les valeurs caractéristiques sont donc nulles et les solutions  $\{c\}$  sont des polynômes de  $z$ . Soit  $d_z$  le degré en  $z$  de ces polynômes ; on cherche alors les  $c_j$  sous la forme :

$$c_j = \sum_{k=1}^{d_z+1} q_{(\beta_{xy}(j-1)+k)} z^{k-1}$$

---

1. nous utilisons Mathematica

et l'on pratique l'identification des polynômes. Ce n'est pas si simple qu'il y paraît à première vue : on construit plus d'équations que d'inconnues mais en éliminant les équations dépendantes des précédentes on arrive à un système de Cramer pour un degré  $d_z$  convenablement choisi. On constate que pour  $d_z < d_{xy} + 3$  l'identification ne conduit pas à une solution, tandis que pour tous les  $d_z \geq d_{xy} + 3$  elle conduit à une même solution de degré  $d_{xy} + 3$  en  $z$ .

Une autre difficulté technique est la suivante : pour  $d_z = 3$  et  $d_{xy} = 2$  la résolution du système générique se ramène à l'inversion d'une matrice formelle  $M$  de dimensions  $210 \times 210$ . On peut effectivement l'inverser mais d'une part  $M^{-1}$  est très encombrante (de l'ordre de 100 Go!), et d'autre part sont instanciation rencontre des divisions par 0. Il vaut infiniment mieux instancier  $M$  avant son inversion. La solution purement générique est donc impraticable. Cependant pour chaque type de couche on peut calculer une solution "semi-générique" du système (8.1) où la raideur  $K$  a été instanciée à la valeur numérique  $K^{(k)}$  convenable. Par exemple pour une plaque stratifiée composée de couches orthotropes identiques à une rotation de  $\pi/2$  près on n'aura que deux solutions semi-génériques à calculer.

### 8.1.2 Équations des plaques stratifiées

En écrivant maintenant les conditions de continuité aux interfaces, les conditions de liaison sur  $\vec{u}$  et la nullité du vecteur contrainte en  $z \pm h/2$  on écrit le système suivant :

$$K^{(k)} \text{div grad}_s \vec{u}(k) = -K^{(k)} \text{div}(B^\dagger \zeta + \epsilon^o) + (\lambda_1 + \lambda_4 z) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_5 z) \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (8.4a)$$

$$\vec{\sigma}^{(k)} = K^{(k)} (\text{grad}_s \vec{u}^{(k)} + B^\dagger \zeta) \quad (8.4b)$$

$$\vec{\sigma}^{(k)}(x, y, z_k) \cdot \vec{e}_3 = \vec{\sigma}^{(k-1)}(x, y, z_k) \cdot \vec{e}_3 \quad (8.4c)$$

$$\vec{u}^{(k)}(x, y, z_k) = \vec{u}^{(k-1)}(x, y, z_k) \quad (8.4d)$$

$$\vec{\sigma}^{(1)}(x, y, -h/2) \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad (8.4e)$$

$$\vec{\sigma}^{(n)}(x, y, h/2) \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad (8.4f)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \vec{u}^k dz = 0 ; \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} u_1^k z dz = 0 ; \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} u_1^k z dz = 0 \quad (8.4g)$$

Dans une première étape les solutions semi-génériques permettent de résoudre les équations (8.4.a à 8.4.e) pour  $\vec{u}^{(o)}$  donné ; ensuite on résout les huit équations scalaires (8.4.f et (8.4.g) pour déterminer trois inconnues scalaires  $\vec{u}_j^{(o)}$  et les cinq inconnues scalaires  $\lambda_i$ .



## 8.2 Quelques résultats

Nous ne nous sommes intéressés qu'à la plaque de trois couches qui nous a déjà servi de référence au paragraphe (6.3).

Pour obtenir tous les résultats intéressants sur un plan général il suffit de résoudre le système (8.4) pour une déformation généralisée  $\zeta$  polynomiale de degré 2.<sup>2</sup>

Dans l'équation (8.4.a) on peut remplacer l'expression  $B^\dagger \zeta$  par  $grad_s(DA^\dagger q)$  et mener les calculs pour des déplacements généralisés  $q$  de degré 3. En tout état de cause nous présentons les résultats en termes de ces derniers.

La bonne nouvelle est que les résultats classiques sont vérifiés jusqu'au deuxième degré inclus : plus précisément les valeurs calculées ne diffèrent des valeurs classiques que par la contribution des termes du troisième degré en  $(x, y)$  des déplacements généralisés. Ainsi en est-il des contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$  et du tenseur de flexion-torsion.

Les contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  données par les formules (5.2) sont évidemment loin de la vérité mais leur calcul à partir des formules (6.3) ou (6.10) est exact à cette même contribution près des termes de degré 3.

Infirmée est aussi l'hypothèse dite "des sections planes" selon laquelle les normales resteraient rectilignes. Il suffit de revenir à la figure 6.5 pour se le rappeler. Toutefois cette hypothèse ne sert qu'à estimer les contraintes de membrane  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  et nous venons de voir que le résultat obtenu est très correct (toujours au troisième ordre près), ce qui la justifie.

Détaillons un peu ce qu'il en est du gauchissement de la normale. Pour y voir plus clair nous avons considéré le plus bas degré des monômes de  $\vec{\beta}$  qui sont concernés :

$\vec{\beta}$ , inclinaison de la normale sur le plan tangent : degré 0,

$grad_s \vec{\beta}$ , courbure de la déformée : degré 1,

$(u_1, u_2)$  composantes du gauchissement de la normale : degré 2,

Ainsi la variation du gauchissement est-elle un infiniment petit (degré 3) d'ordre supérieur à la courbure (degré 1), ce qui explique le résultat.

Comme l'écrivait Jean Courbon à propos des poutres : "*On peut négliger la variation du gauchissement entre deux sections droites voisines.*" ce qu'il nommait "principe de Navier-Bernoulli généralisé" ([30], chp.8, §C). C'est exactement ce qui se passe dans les plaques où la normale joue le même rôle que la section droite dans les poutres.

---

2. Dans une application particulière on pourra évidemment utiliser le développement limité effectivement disponible.

# Bibliographie

- [1] **Wikipedia** <http://fr.wikipedia.org/wiki/Pseudo-inverse>
- [2] **S.L. Campbell and C.D. Meyer.** Generalized Inverses of Linear Transformations, Dover Publications, 1991
- [3] **B.Nayroles** Plate theory and complementary displacement method, International Journal of Solids and Structures 36 (1999) pp1329-1368 Elsevier Science
- [4] **J.-L. Batoz et G.Dhatt** Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 1 solides élastiques, vol. 2 Poutres et plaques, Hermès 1990
- [5] **W.T. Koiter** "On the Foundations of the Linear Theory of Thin Elastic Shells" Koninkl. Nederl., Akademie van Wetenschappen, Amsterdam (reprinted from proceedings serie B-73, n°3, 1970)
- [6] **W.T. Koiter and J.G. Simmonds** "Foundations of shell Theory" Applied Mechanics : Proceedings of the 13th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Moscow 1972 (E. Becker and G.K. Michailov, eds), p. 150-176, Springer-Verlag
- [7] **Nguyen Quoc-Son** Stabilité et mécanique non linéaire pp. 191-194. Hermès 2000
- [8] **J.-J. Moreau** Duality Characterization of Strain Tensors Distributions in an Arbitrary Open Set. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol 72, N°2, December 1979
- [9] **P. Ladevèze** "Justification de la théorie des coques élastiques" Journal de Mécanique, Vol. 15, n°5, 1976, p813-856
- [10] **P. Ladevèze** "On the validity of linear shell theories" in Theory of Shells, W.T. Koiter and G. K. Michailov Eds North-Holland Publishing Company (1980) p. 369-391 La théorie exacte de la flexion des plaques
- [11] **P Ladeveze** - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy, vol. 326, issue 7, pp. 407-414 1998
- [12] **M. Levinson** "An accurate, simple theory the statics and dynamics of elastic plates" Mech. Res. Com. Vol. 7(6), p. 343-350, 1980

- [13] **S.Nair and E.Reissner** "On Asymptotic Expansions and Error Bounds in the Derivation of Two-Dimensional Shell Theory"
- [14] **R.D.Mindlin** Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, JAM, Vol. 18, p. 31-38, 1951
- [15] **E. Reissner** The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates. JAM, vol 12, pp A69-A76, 1945
- [16] **E. Reissner** On a Variational Theorem in Elasticity, J. Maths and Physics, vol. 28, pp 90-95, 1950
- [17] **E. Reissner** A Consistent Treatment of Transverse Shear Deformations in Laminated Plates, AIAA Journal vol. 10, N° 5. pp716-718 1972
- [18] **E. Reissner** "On the Tranverse Bending of Plates Including the Effect of Tranverse Shear Deformation" Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 11, 1975, pp. 569-573
- [19] **E. Reissner** "On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates" Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 12, 1976, pp. 545-554 Studies in Applied Mathematics 56, p 189-217 (1977). Elsevier North Holland
- [20] **E. Reissner** Reflections on the Theory of Elastic Plates,ASME, Applied Mechanics Review, vol. 38, n°11, pp. 1453-1464, 1985
- [21] **M. Touratier** "An efficient standard plate theory" Int. J. Engng. Sci. Vol 29, N°8, pp. 901-916, 1991
- [22] **Z. Rychter** "A Sixth-Order Plate Theory-Derivation and Error Estimate" Journal of Applied Mechanics Vol. 54 (1987), p 275-279
- [23] **G. Verchery** "Application aux structures minces élastiques de principes variationnels mixtes. Exemple de la poutre à cisaillement transversal." C. R. Acad. Sc. Paris, t.278 (1974), série A, p. 571-574
- [24] **E. et F. Cosserat** Théorie des corps déformables pp. 65-122 Hermann 1909
- [25] **L. Solomon** Élasticité linéaire, p.37 Masson 1968
- [26] **J. Salençon** Mécanique des milieux continus. Tome 1, p.50. Ellipses 1988
- [27] **J.-J. Moreau** Duality Characterization of Strain Tensors Distributions in an Arbitrary Open Set. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol 72, N°2, December 1979
- [28] **M.E. Gurtin** The linear theory of elasticity, p. 1-295 in "Handbuch der Physik ". II. Festkörper- mechanik" Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg . 1972

- [29] **J.J.Moreau et M.Ros** Tenseurs de distributions dérivées secondes sur un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . "Séminaire d'Analyse Convexe" Montpellier Vol.6, Exposé n°12, 1979
- [30] **J.Courbon** Résistance des Matériaux. Dunod Paris 1971
- [31] **Warren C. Young** Roark's Formulas for Stress and Strain, sixth edition, Mac Graw Hill 1989
- [32] **Daniel Gay** Matériaux composites. Hermès, Paris 1997

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Différents modèles de plaque</b>	<b>5</b>
1.1	La plaque comme solide tridimensionnel . . . . .	5
1.1.1	Géométrie et coordonnées . . . . .	5
1.1.2	Efforts extérieurs ou charges . . . . .	6
1.1.3	Notations . . . . .	7
1.1.4	Espaces fonctionnels . . . . .	7
1.1.5	Dualités déplacements-efforts et déformations-contraintes . . . . .	8
1.1.6	Opérateur de déformation et opérateur d'équilibre . . .	9
1.1.7	Noyaux, images et orthogonalité dans la dualité à quatre espaces . . . . .	10
1.2	Le modèle de Reissner . . . . .	11
1.2.1	Déplacements généralisés, cisaillement transverse et flexion simple . . . . .	11
1.2.2	Efforts extérieurs généralisés . . . . .	13
1.2.3	Déformations généralisées . . . . .	14
1.2.4	Contraintes généralisées . . . . .	15
1.2.5	Équations différentielles de l'équilibre pour le modèle R	16
1.3	La théorie élémentaire de la flexion : modèle K (comme Kir- chhoff) . . . . .	17
1.3.1	Déplacements et déformations généralisés . . . . .	17
1.3.2	Contraintes et efforts généralisés . . . . .	18
1.3.3	Dualité pour le modèle K . . . . .	18
1.3.4	Équations différentielles de l'équilibre pour le modèle K	19
1.3.5	Remarques sur les conditions aux limites . . . . .	19
1.4	Annexes du chapitre 1 . . . . .	20
1.4.1	Démonstration des équations différentielles d'équilibre pour le modèle R . . . . .	20
1.4.2	Démonstration des équations différentielles d'équilibre pour le modèle K . . . . .	21

<b>2</b>	<b>Compatibilité des déformations</b>	<b>23</b>
2.1	Formulation différentielle de la compatibilité locale . . . . .	23
2.1.1	Rappel de résultats pour le solide tridimensionnel . . .	23
2.1.2	Formulation différentielle de la compatibilité locale pour le modèle de Reissner . . . . .	24
2.2	Compatibilité globale . . . . .	25
2.2.1	Deux théorèmes de J.J.Moreau . . . . .	25
2.2.2	Compatibilité globale pour le modèle tridimensionnel .	26
2.2.3	Compatibilité globale pour le modèle de Reissner . . .	29
2.2.4	Compatibilité globale pour le modèle de Kirchhoff . . .	31
<b>3</b>	<b>Du tridimensionnel au bidimensionnel</b>	<b>32</b>
3.1	Moments et relèvements . . . . .	32
3.2	Déplacement principal et déplacement complémentaire . . . .	34
3.3	Efforts tridimensionnels et efforts généralisés . . . . .	36
3.4	Déformations tridimensionnelles et déformations généralisées .	39
3.5	Contraintes tridimensionnelles et contraintes généralisées . . .	40
<b>4</b>	<b>Cadres fonctionnels en élasticité linéaire</b>	<b>41</b>
4.1	Traces et moments . . . . .	41
4.2	Modèle de Reissner-Mindlin . . . . .	43
4.3	Modèle de Kirchhoff . . . . .	44
4.4	Effet d'une force concentrée . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Lois de comportement de plaque</b>	<b>45</b>
5.1	Notations matricielles . . . . .	45
5.2	Contraintes et cisaillement transverse . . . . .	46
5.3	Relations brutes entre déformations et contraintes généralisées	47
<b>6</b>	<b>Estimations classiques de l'effort tranchant</b>	<b>49</b>
6.1	Contraintes de cisaillement . . . . .	49
6.2	Cas d'une plaque homogène . . . . .	51
6.3	Cas général et exemple de plaque stratifiée . . . . .	52
6.3.1	Présentation d'un exemple de référence . . . . .	52
6.4	Deux approches voisines . . . . .	53
6.4.1	Nécessité de privilégier certaines variables . . . . .	53
6.4.2	L'approche de Batoz et Dhett (notée "BD") . . . . .	55
6.4.3	Une variante notée "BN" de l'approche Batoz-Dhatt .	56
6.5	L'estimation de Reissner . . . . .	57
6.5.1	La fonctionnelle de Reissner . . . . .	57
6.5.2	La méthode de Reissner . . . . .	59

6.5.3	Application à la plaque stratifiée de référence . . . . .	62
6.6	Calcul du déplacement de cisaillement . . . . .	64
<b>7</b>	<b>La théorie du déplacement complémentaire</b>	<b>65</b>
7.1	Introduction . . . . .	65
7.2	Lois d'effort . . . . .	66
7.3	Équivalence éventuelle des problèmes d'équilibre tridimensionnel et bidimensionnel . . . . .	68
7.4	Équation différentielle du déplacement complémentaire . . . . .	71
7.5	La variante de Kirchhoff . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Calcul des plaques élastiques stratifiées</b>	<b>76</b>
8.1	Technique de calcul . . . . .	76
8.1.1	Solutions polynomiales dans une couche homogène . . . . .	76
8.1.2	Équations des plaques stratifiées . . . . .	78
8.2	Quelques résultats . . . . .	79